GEOMETRIJA

A. POGORELOVAS

6-11



A. POGORELOVAS

GEOMETRIJA

MOKYMO PRIEMONĖ VI—XI KLASEI

Scanned by
Cloud Dancing



KAUNAS ŠVIESA 1986

ВВК 22.151.Oz72
Po-57

А. В. Погорелов
ГЕОМЕТРИЯ
Учебное пособие для 6—10 классов
средней школы
Москва, «Просвещение», 1985

Vertė PETRAS RUMŠAS, PETRAS VAŠKAS
Žodynėlį sudarė ELENA NENIŠKYTĖ

ANTRASIS LEIDIMAS

Vertimą recenzavo JUOZAS MAČYS

Originalas TSRS švietimo ministerijos leistas
vartoti mokyklose
Lietuvos TSR švietimo ministerijos priimta vartot
mokyklose

$P\ \frac{4306020400-021}{M\,853(10)-86}$ Prot. Nr. 1—85

© Издательство «Просвещение», 1982 г.
© Vertimas į lietuvių kalbą, leidykla „Šviesa", 1983

§ 1. PAGRINDINĖS PAPRASČIAUSIŲ GEOMETRINIŲ FIGŪRŲ SAVYBĖS

Geometrija yra mokslas apie geometrinių figūrų savybes. Žodis „geometrija", kilęs iš graikų kalbos, reiškia „žemės matavimą". Šis pavadinimas primena, kad geometrija taikoma matavimams vietovėje.

Geometrinių figūrų pavyzdžiai: trikampis, kvadratas, apskritimas (1 pav.).

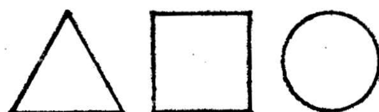
Geometrinės figūros labai įvairios. Geometrinės figūros dalis irgi yra geometrinė figūra. Sujungę kelias geometrines figūras, gauname taip pat geometrinę figūrą. Kairiąją 2 paveiksle pavaizduotą figūrą sudaro trikampis ir trys kvadratai, o dešiniąją — apskritimas ir apskritimų dalys. Laikome, kad kiekviena geometrinė figūra sudaryta iš taškų.

Geometrija, kurios mokomės mokykloje, vadinama euklidine. Mat ilgą laiką geometrijos buvo mokomasi iš senovės graikų mokslininko Euklido (III a. pr. m. e.) nuostabaus matematikos veikalo „Pradmenys".

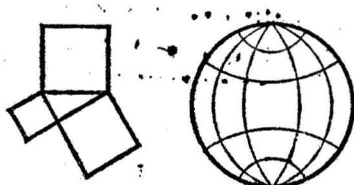
Geometrijos mokytis pradėsime nuo planimetrijos. *Planimetrija* vadiname tą geometrijos dalį, kuri nagrinėja plokštumos (plokščiąsias) figūras.

TAŠKAS IR TIESĖ

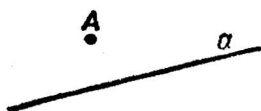
Pagrindinės plokščiosios geometrinės figūros yra *taškas* ir *tiesė*. Taškus ir tieses braižome smailiai nudrožtu pieštuku. Tiesei brėžti vartojama liniuotė. Taškus susitarsime žymėti didžiosiomis



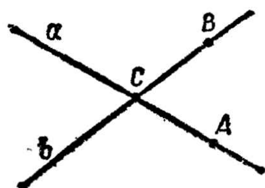
1 pav.



2 pav.



3 pav.



4 pav.



5 pav.

raidėmis: *A*, *B*, *C*, *D*, ... Tieses žymėsime mažosiomis raidėmis: *a*, *b*, *c*, *d*, ...

3 paveiksle matote tašką *A* ir tiesę *a*.

PAGRINDINĖS TAŠKŲ IR TIESIŲ PRIKLAUSYMO SAVYBĖS

Pažiūrėkite į 4 paveikslą. Matote tieses *a*, *b* ir taškus *A*, *B*, *C*. Taškai *A* ir *C* *yra* tiesėje *a*. Galima taip pat sakyti, kad taškai *A* ir *C* *priklauso* tiesei *a* arba kad tiesė *a* *eina* per taškus *A* ir *C*.

Taškas *B* yra tiesėje *b*. Jis nėra tiesėje *a*. Taškas *C* yra ir tiesėje *a*, ir tiesėje *b*. Tiesės *a* ir *b* *susikerta* taške *C*. Tiesių *a* ir *b* *susikirtimo taškas* yra *C*.

5 paveiksle matote, kaip liniuote brėžiama tiesė, einanti per du taškus *A* ir *B*.

Pagrindinėmis plokštumos ir tiesių priklausymo savybėmis vadinsime šias dvi savybes:

I_1. ***Kad ir kokia būtų tiesė, yra taškų, priklausančių tai tiesei, ir taškų, nepriklausančių tai tiesei.***

I_2. ***Per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę.***

Tiesę galima žymėti dviem jos taškais. Pavyzdžiui, 4 paveiksle pavaizduotą tiesę *a* galima žymėti *AC*. Tiesę *b* galima žymėti *BC*.

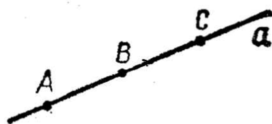
Ar gali dvi skirtingos tiesės turėti daugiau kaip vieną susikirtimo tašką? Ne, negali. Jeigu jos turėtų du susikirtimo taškus, tai per tuos taškus eitų dvi skirtingos tiesės. To negali būti, nes per du taškus eina tik viena tiesė. Vadinasi, sužinojome dar vieną savybę:

1.1. ***Dvi skirtingos tiesės arba nesusikerta, arba susikerta tik viename taške.***

PAGRINDINĖS TAŠKŲ TARPUSAVIO PADĖTIES TIESĖJE IR PLOKŠTUMOJE SAVYBĖS

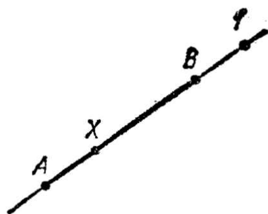
Pažiūrėkite į 6 paveikslą. Matote tiesę *a* ir tris tos tiesės taškus *A*, *B* ir *C*. Taškas *B* *yra tarp* taškų *A* ir *C*, jis *skiria* taškus *A* ir *C*. Galima sakyti ir kitaip: taškai *A* ir *C* *yra skirtingose*

taško *B pusėse*. Taškai *A* ir *B yra vienoje* taško *C pusėje*, taškas *C* jų neskiria. Taškai *B* ir *C* yra vienoje taško *A* pusėje.



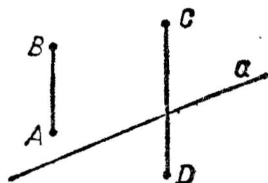
6 pav.

Atkarpa vadiname tiesės dalį, kurią sudaro visi tos tiesės taškai, esantys tarp dviejų nurodytų jos taškų. Tuodu taškai vadinami atkarpos *galais*. Atkarpą žymime, nurodydami jos galus. Jei sakome arba rašome „atkarpa *AB*", tai galvojame apie atkarpą, kurios galai yra taškai *A* ir *B*.



7 pav.

7 paveiksle matote atkarpą *AB*. Ji yra tiesės *AB* dalis. Ta tiesės dalis nubrėžta storesne linija. Tiesės taškas *X* yra tarp taškų *A* ir *B*, todėl jis priklauso atkarpai *AB*. Taškas *Y* nėra tarp taškų *A* ir *B*, todėl jis nepriklauso atkarpai *AB*.



8 pav.

Pažiūrėkite į 8 paveikslą. Tiesė *a dalija* plokštumą į dvi pusplokštumes. Šis dalinys turi tokią savybę. ***Jei atkarpos galai priklauso vienai pusplokštumei, tai atkarpa nekerta tiesės. Jei atkarpos galai priklauso skirtingoms pusplokštumėms, tai atkarpa kerta tiesę.*** 8 paveiksle taškai *A* ir *B* priklauso vienai iš pusplokštumių, į kurias tiesė *a* dalija plokštumą. Todėl atkarpa *AB* nekerta tiesės *a*. Taškai *C* ir *D* priklauso skirtingoms pusplokštumėms. Todėl atkarpa *CD* kerta tiesę *a*.

Taškų padėties tiesėje ir plokštumoje pagrindinėmis savybėmis vadinsime šias savybes:

II_1. ***Iš trijų tiesės taškų vienas ir tik vienas yra tarp kitų dviejų.***

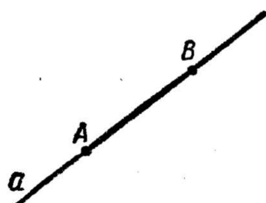
II_2. ***Tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes.***

Uždavinys (9)*. Duota tiesė ir trys taškai *A*, *B* ir *C*, nepriklausantys tai tiesei. Žinome, kad atkarpa *AB* kerta tiesę, o atkarpa *AC* jos nekerta. Ar kerta tą tiesę atkarpa *BC*? Pagrįskite atsakymą.

Sprendimas. Tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Taškas *A* priklauso vienai tų pusplokštumių. Atkarpa *AC* nekerta tiesės. Vadinasi, taškas *C* yra toje pačioje pusplokštumėje,

---

* Skliausteliuose parašytas skaičius reiškia paragrafo pratimų uždavinio numerį.



9 pav.

kaip ir taškas A. Atkarpa AB kerta tiesę. Todėl taškas B yra kitoje pusplokštumėje. Vadinasi, taškai B ir C priklauso skirtingoms pusplokštumėms, o iš to aišku, kad atkarpa BC kerta šią tiesę.

Pustiese, arba *spinduliu*, vadiname tiesės dalį, kurią sudaro visi tos tiesės taškai, esantys vienoje nurodyto taško pusėje. Šitas taškas vadinamas pustiesės *pradžios tašku*. Vienos tiesės skirtingos pustiesės, turinčios bendrą pradžios tašką, vadinamos *papildomosiomis pustiesėmis*.

9 paveiksle matote tiesę a ir jos tašką A. Taškas A dalija tiesę a į dvi pustieses. Viena pustiesė nubrėžta stora linija, o kita — plona.

Pustiesės žymimos mažosiomis raidėmis. Pustiesę galima žymėti ir dviem taškais: pradžios tašku ir bet kuriuo tašku, priklausančiu tai pustiesei. Tokiu atveju pradžios taškas laikomas pirmuoju. Pavyzdžiui, 9 paveiksle stora linija pavaizduotą pustiesę galima žymėti AB.

U ž d a v i n y s (13). Atkarpoje AB yra taškas C. Pasakykite, kurios iš pustiesių AB, AC, CA ir CB sutampa ir kurios papildo viena kitą. Pagrįskite atsakymą.
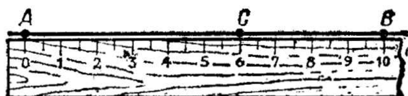
S p r e n d i m a s. Nurodytųjų pustiesių pradžios taškas yra arba taškas A, arba taškas C. Iš pradžių imkime pustieses su pradžios tašku A (pustieses AB ir AC). Taškas C yra tarp taškų A ir B, nes pagal sąlygą jis priklauso atkarpai AB. Vadinasi, taškas A nėra tarp taškų B ir C, t. y. taškai B ir C yra vienoje taško A pusėje. Todėl pustiesės AB ir AC sutampa.

Dabar imkime pustieses su pradžios tašku C (pustieses CA ir CB). Taškas C skiria taškus A ir B. Todėl taškai A ir B negali priklausyti vienai pustiesei. Vadinasi, pustiesės CA ir CB papildo viena kitą.

PAGRINDINĖS ATKARPŲ IR KAMPŲ MATAVIMO SAVYBĖS

Atkarpoms matuoti vartojami įvairūs matavimo įrankiai. Paprasčiausias matavimo įrankis yra liniuotė su padalomis. Atkarpa AB, pavaizduota 10 paveiksle, lygi 10 cm, atkarpa AC lygi

6 cm, o atkarpa BC lygi 4 cm. Atkarpos AB ilgis lygus atkarpų AC ir BC ilgių sumai.



10 pav.

Pagrindinėmis atkarpų matavimo savybėmis vadinsime šias savybes:

III₁. ***Kiekviena atkarpa turi ilgį, didesnį už nulį. Jei atkarpą taškas dalija į dalis, tai atkarpos ilgis lygus tų dalių ilgių sumai.***

Tai reiškia, kad, atkarpoje AB pažymėjus bet kurį tašką C, atkarpos AB ilgis bus lygus atkarpų AC ir BC ilgių sumai. Atkarpos AB ilgį dar vadiname *atstumu* tarp taškų A ir B.

Uždavinys (16). Taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Žinome, kad $AB=4{,}3$ cm, $AC=7{,}5$ cm, $BC=3{,}2$ cm. Ar gali taškas A būti tarp taškų B ir C? Ar gali taškas C būti tarp taškų A ir B? Kuris iš taškų A, B ir C yra tarp kitų dviejų taškų?

Sprendimas. Jei taškas A yra tarp taškų B ir C, tai pagal atkarpų matavimo savybę turi būti: $AB+AC=BC$. Kadangi $4{,}3+7{,}5\neq3{,}2$, tai taškas A nėra tarp taškų B ir C.

Jei taškas C yra tarp taškų A ir B, tai $AC+BC=AB$. Kadangi $7{,}5+3{,}2\neq4{,}3$, tai taškas C nėra tarp taškų A ir B.

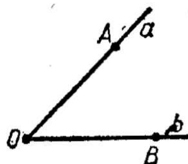
Iš trijų tiesės taškų A, B ir C vienas taškas turi būti tarp kitų dviejų taškų. Vadinasi, tas taškas yra B.

Kampu vadiname **figūrą, kurią sudaro taškas — *kampo viršūnė* — ir dvi skirtingos pustiesės, turinčios bendrą pradžios tašką,— *kampo kraštinės*.**

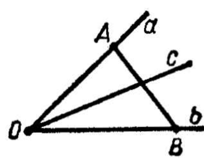
Kampas, kurio kraštinės yra vienos tiesės papildomosios pustiesės, vadinamas *ištiestiniu*.

11 paveiksle matote kampą, kurio viršūnė yra O, kraštinės — pustiesės a ir b. Kampą žymime, nurodydami arba jo viršūnę, arba jo kraštines, arba tris taškus: viršūnę ir du kampo kraštinių taškus. Žodį „kampas“ kartais pakeičiame ženklu $\angle$. Kampą, pavaizduotą 11 paveiksle, galima žymėti trimis būdais: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. Žymint kampą trečiuoju būdu, viršūnę reiškianti raidė rašoma viduryje.

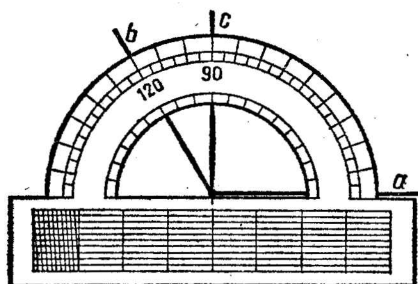
Susitarsime sakyti, kad spindulys *eina tarp* kampo krašti-



11 pav.



12 pav.



13 pav.

nių, kai jis išeina iš to kampo viršūnės ir kerta atkarpą, kurios galai priklauso kampo kraštinėms. Spindulys c, pavaizduotas 12 paveiksle, eina tarp kampo (ab) kraštinių, nes jis išeina iš kampo (ab) viršūnės ir kerta atkarpą AB, kurios galai yra to kampo kraštinėse.

Kai kampas yra ištiestinis, laikome, kad kiekvienas spindulys, išeinantis iš kampo viršūnės ir nesutampantis su jo kraštinėmis, eina tarp kampo kraštinių.

Kampai matuojami laipsniais su matlankiu. 13 paveiksle pavaizduotas kampas (ab) lygus 120°. Spindulys c eina tarp kampo (ab) kraštinių. Kampas (ac) lygus 90°, o kampas (bc) lygus 30°. Kampas (ab) lygus kampų (ac) ir (bc) sumai.

Pagrindinėmis kampų matavimo savybėmis vadinsime šias savybes:

III_2. ***Kiekvienas kampas turi laipsninį matą, didesnį už nulį. Ištiestinis kampas lygus 180°. Jei spindulys, einantis tarp kampo kraštinių, jį dalija į du kampus, tai šių kampų laipsninių matų suma lygi pradinio kampo laipsniniam matui.***

Tai reiškia, kad kampas (ab) lygus kampų (ac) ir (bc) sumai, kai spindulys c eina tarp kampo (ab) kraštinių.

Uždavinys (28). Ar gali spindulys c eiti tarp kampo (ab) kraštinių, kai $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$?

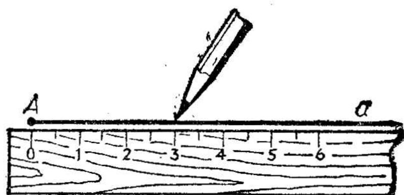
Sprendimas. Jei spindulys c eina tarp kampo (ab) kraštinių, tai pagal kampų matavimo savybę turi būti: $\angle(ac)+\angle(cb)=\angle(ab)$. Kadangi $30°+80°\neq 50°$, tai spindulys c negali eiti tarp kampo (ab) kraštinių.

PAGRINDINĖS ATKARPŲ IR KAMPŲ ATIDĖJIMO SAVYBĖS

14 paveiksle pavaizduota pustiesė a, kurios pradžia yra taškas A, ir parodyta, kaip liniuote toje pustiesėje atidedama nurodyto ilgio (3 cm) atkarpa.

Pažiūrėkite į 15 paveikslą. Pustiesę a pratęsus už pradžios taško A, gaunama tiesė, kuri plokštumą dalija į dvi pusplokštumes. Paveiksle parodyta, kaip matlankiu prie pustiesės a viršu-

tinėje pusplokštumėje atidedamas nurodyto laipsninio mato (60°) kampas.

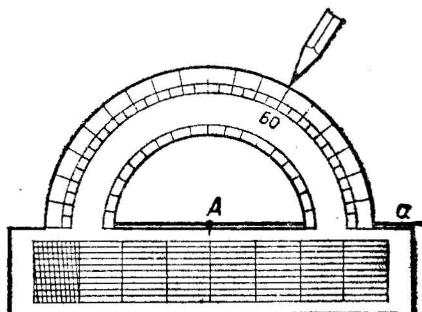


14 pav.

P a g r i n d i n ė m i s atkarpų ir kampų atidėjimo s a v y b ė m i s vadinsime šias savybes:

IV_1. *Kiekvienoje pustiesėje nuo jos pradžios taško galima atidėti vieną ir tik vieną duoto ilgio atkarpą.*

IV_2. *Prie kiekvienos pustiesės nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti vieną ir tik vieną kampą, turintį duotą laipsninį matą, mažesnį už 180°.*



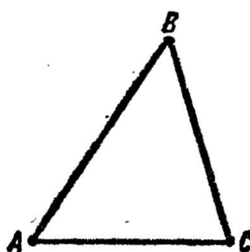
15 pav.

U ž d a v i n y s (35). Spindulyje AB atidėta atkarpa AC, mažesnė už atkarpą AB. Kuris iš taškų A, B ir C yra tarp kitų dviejų? Pagrįskite atsakymą.

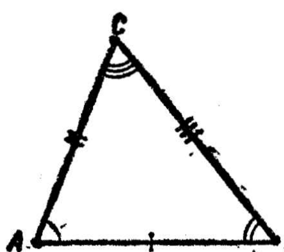
S p r e n d i m a s. Kadangi taškai B ir C priklauso vienai pustiesei, kurios pradžia yra taškas A, tai taškas A jų neskiria, t. y. taškas A nėra tarp taškų B ir C. Ar gali taškas B būti tarp taškų A ir C? Jeigu jis būtų tarp taškų A ir C, tai būtų teisinga lygybė $AB+BC=AC$. Bet tai neįmanoma, nes pagal sąlygą atkarpa AC mažesnė už atkarpą AB. Vadinasi, taškas B nėra tarp taškų A ir C. Iš trijų taškų A, B ir C vienas turi būti tarp kitų dviejų taškų. Todėl C yra tarp taškų A ir B.

TRIKAMPIO, LYGAUS DUOTAJAM TRIKAMPIUI, EGZISTAVIMAS

Trikampiu vadiname figūrą, kurią sudaro trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei, ir trys atkarpos, jungiančios kiekvienus du iš tų taškų. Šitie taškai vadinami trikampio *viršūnėmis*, o atkarpos — jo *kraštinėmis*. 16 paveiksle matote nubraižytą trikampį, kurio viršūnės yra taškai A, B ir C, o kraštinės — atkarpos AB, BC ir AC. Trikampį žymime, nurodydami jo viršūnes. Vietoj žo-



16 pav.



17 pav.

džio „trikampis“ kartais rašomas ženklas $\triangle$. Pavyzdžiui, 16 paveiksle pavaizduotas trikampis žymimas šitaip: $\triangle ABC$.

Trikampio ABC ***kampu*** **prie viršūnės** *A* vadiname kampą, kurį sudaro pustiesės *AB* ir *AC*. Panašiai nusakomi to trikampio kampai prie viršūnių *B* ir *C*.

Lygiomis atkarpomis vadinamos atkarpos, kurios yra vienodo ilgio. *Lygiais* kampais vadiname kampus, kurie yra vienodo laipsninio mato. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ vadinami lygiais, kai $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Trumpai tą patį pasakome šitaip: ***trikampiai, kurių atitinkamos kraštinės lygios ir lygūs atitinkami kampai, vadinami lygiais.***

17 paveiksle matote du lygius trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$. Juose $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Brėžinyje lygias atkarpas dažniausiai žymime vienu, dviem arba trimis brūkšneliais, o lygius kampus — vienu, dviem arba trimis lankeliais.

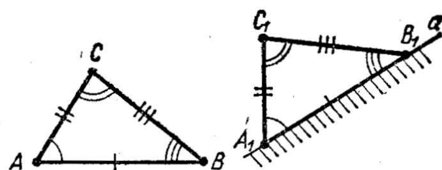
Trikampių lygumui žymėti vartojamas lygumo ženklas $=$. Užrašas „$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$“ skaitomas šitaip: „Trikampis *ABC* lygus trikampiui $A_1B_1C_1$“. Čia svarbi trikampio viršūnių rašymo tvarka. Lygybė $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ šiuo atveju reiškia, kad $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ..., o lygybė $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ — visiškai kitką: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...

Uždavinys (43). Trikampis *ABC* lygus trikampiui *PQR*. Žinome, kad kraštinė *AB* lygi 10 m, o kampas *C* lygus 90°. Raskite kraštinę *PQ* ir kampą *R*. Pagrįskite atsakymą.

Sprendimas. Kadangi trikampiai *ABC* ir *PQR* lygūs, tai $\angle C = \angle R$, $AB = PQ$. Vadinasi, $PQ = 10$ m, $\angle R = 90°$.

Turime trikampį *ABC* ir spindulį *a* (18 pav.). Paslinkime trikampį *ABC*, kad jo viršūnė *A* sutaptų su spindulio *a* pradžia, viršūnė *B* patektų į spindulį *a*, o viršūnė *C* atsidurtų vienoje iš

dviejų pusplokštumių, į kurias plokštumą dalija spindulys a ir jo tęsinys. Trikampio viršūnes naujoje padėtyje pažymėkime A_1, B_1 ir C_1. *Trikampis* $A_1B_1C_1$ *lygus trikampiui* ABC. Tai, kad egzistuoja trikampis $A_1B_1C_1$, lygus trikampiui ABC ir padėtas nurodytu būdu prie turimo spindulio a, laikysime viena iš pagrindinių savybių, būdingų paprasčiausioms figūroms. Tą savybę reikšime šitaip:



18 pav.

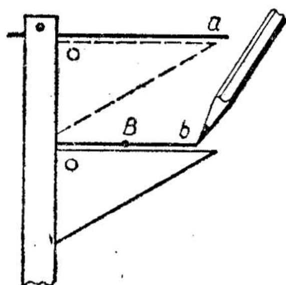
IV$_3$. ***Kad ir koks būtų trikampis, yra jam lygus trikampis, kurio padėtis duotos pustiesės atžvilgiu yra iš anksto nurodyta.***

PAGRINDINĖ LYGIAGREČIŲ TIESIŲ SAVYBĖ

Dvi plokštumos tiesės, kurios nesusikerta, vadinamos *lygiagrečiomis* tiesėmis. Čia tiesės laikomos neribotai pratęstomis abiem kryptimis.

19 paveiksle parodyta, kaip kampainiu ir liniuote per tašką B brėžiama tiesė b, lygiagreti tiesei a.

Tiesių lygiagretumui žymėti vartojame ženklą ||. Užrašą „$a \parallel b$" skaitome šitaip: „Tiesė a lygiagreti tiesei b".



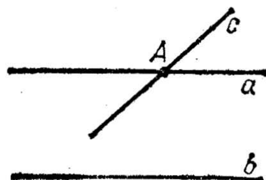
19 pav.

Pagrindinė lygiagrečių tiesių savybė yra tokia:

V. ***Plokštumoje per tašką, nepriklausantį turimai tiesei, galima nubrėžti ne daugiau kaip vieną tiesę, lygiagrečią tai tiesei.***

Uždavinys (45). Ar gali tiesė, kertanti vieną iš lygiagrečių tiesių, nekirsti kitos? Pagrįskite atsakymą.

Sprendimas. Raidėmis a ir b žymėsime lygiagrečias tieses, o raide c — tiesę, kertančią vieną iš tų tiesių, pavyzdžiui tiesę a. Tiesių a ir c susikirtimo tašką žymėsime raide A (20 pav.). Jei



20 pav.

tiesė *c* nekirstų tiesės *b*, tai per tašką *A* eitų dvi tiesės, kurios nekerta tiesės *b*, būtent, tiesė *a* ir tiesė *c*. Iš lygiagrečių tiesių savybės aišku, kad to negali būti. Vadinasi, tiesė *c*, kirsdama tiesę *a*, turi kirsti ir tiesę *b*.

AKSIOMA, TEOREMA, ĮRODYMAS

Kad teiginys apie geometrinės figūros savybę yra teisingas, įsitikiname samprotaudami. Tas samprotavimas vadinamas *įrodymu*. Geometrinės figūros savybę išreiškiantis teiginys, kurio teisingumu įsitikiname įrodydami, vadinamas *teorema*. Išnagrinėsime pavyzdį.

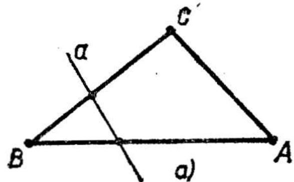
1.2 teorema. ***Jei tiesė, neinanti per trikampio viršūnę, kerta vieną jo kraštinę, tai ji kerta tik vieną iš kitų dviejų kraštinių.***

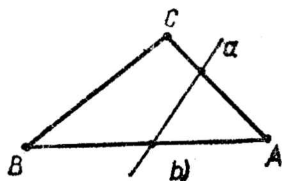
Įrodymas. Tarkime, kad tiesė *a* neina per trikampio *ABC* viršūnę ir kerta jo kraštinę *AB* (21 pav.). Tiesė *a* dalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Taškai *A* ir *B* yra skirtingose pusplokštumėse, nes atkarpa *AB* kerta tiesę *a*. Taškas *C* yra vienoje iš tų pusplokštumių. Jei taškas *C* yra toje pačioje pusplokštumėje, kaip ir taškas *A*, tai atkarpa *AC* nekerta tiesės *a*, o atkarpa *BC* kerta tą tiesę (21 pav., *a*). Jei taškas *C* yra toje pačioje pusplokštumėje, kaip ir taškas *B*, tai atkarpa *AC* kerta tiesę *a*, o atkarpa *BC* jos nekerta (21 pav., *b*). Abiem atvejais tiesė *a* kerta tik vieną trikampio *ABC* kraštinę: arba *AC*, arba *BC*. Teorema įrodyta.

Paprasčiausių figūrų pagrindines savybes nusakantys teiginiai, kurių neįrodome, vadinami *aksiomomis*. Žodis aksioma (axiõma) graikų kalba reiškia akivaizdžią tiesą, nereikalingą įrodymų.

Įrodant teoremą, leidžiama remtis aksiomomis, t. y. teiginiais, nusakančiais pagrindines paprasčiausių figūrų savybes, ir anksčiau įrodytais teiginiais, t. y. teoremomis. Kitais teiginiais, net nusakančiais tariamai akivaizdžias figūrų savybes, remtis negalima.

Įrodant teoremą, leidžiama remtis brėžiniu kaip geometriniu užrašu to, ką pasakome žodžiais. Samprotaujant negalima





21 pav.

kalbėti apie figūros savybes, matomas brėžinyje, kai jos neišplaukia iš aksiomų ir anksčiau įrodytų teoremų.

Teoremos formuluotę sudaro dvi dalys. Pirmoje dalyje pasakoma, kas duota. Šita dalis vadinama teoremos *sąlyga*. Antroje dalyje pasakoma, ką reikia įrodyti. Šita dalis vadinama teoremos *išvada*. Pavyzdžiui, 1.2 teoremos sąlygoje pasakyta, kad tiesė neina per trikampio viršūnę ir kerta vieną jo kraštinę. Šios teoremos išvadoje sakoma, kad ta tiesė kerta tik vieną iš kitų dviejų trikampio kraštinių.

Be žodžių „aksioma" ir „teorema", geometrijoje dažnai vartojamas žodis „apibrėžimas". Ką nors *apibrėžti* reiškia paaiškinti, kas tai yra. Pavyzdžiui, sakoma: „Pasakykite trikampio apibrėžimą". Į tai atsakoma: „Trikampiu vadiname figūrą, kurią sudaro trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei, ir trys atkarpos, jungiančios kiekvienus du iš tų taškų". Kitas pavyzdys: „Pasakykite lygiagrečių tiesių apibrėžimą". Atsakome: „Lygiagrečiomis tiesėmis vadinamos tiesės, kurios nesusikerta". Jau mokate pasakyti atkarpų lygumo, kampų lygumo ir trikampių lygumo apibrėžimus.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Ką vadiname geometrija?
2. Pateikite geometrinių figūrų pavyzdžių.
3. Ką vadiname planimetrija?
4. Išvardykite pagrindines plokštumos geometrines figūras.
5. Kokį braižymo įrankį vartojame tiesėms brėžti?
6. Kaip žymime taškus ir tieses?
7. Kurie 4 paveiksle nurodyti taškai priklauso tiesei a ir kurie — tiesei b? Kuriame taške tiesės a ir b susikerta?
8. Pasakykite pagrindines taškų ir tiesių priklausymo savybes.
9. Paaiškinkite, kodėl dvi skirtingos tiesės negali turėti dviejų susikirtimo taškų.
10. Kuris taškas (žr. 6 pav.) skiria kitus du taškus? Kokia taškų B ir C padėtis taško A atžvilgiu?
11. Pasakykite, ką vadiname atkarpa, kurios galai yra nurodytieji taškai.
12. Kokiomis savybėmis pasižymi plokštumos dalinys į dvi pusplokštumes?
13 Pasakykite taškų tarpusavio padėties tiesėje ir plokštumoje pagrindines savybes.

14. Ką vadiname pustiese, arba spinduliu? Kokios pustiesės vadinamos papildomosiomis?
15. Kaip žymimos pustiesės?
16. Kokiu įrankiu matuojamos atkarpos?
17. Pasakykite pagrindinę atkarpų matavimo savybę.
18. Ką vadiname atstumu tarp dviejų duotų taškų?
19. Kokia figūra vadinama kampu?
20. Pasakykite kampo (žr. 11 pav.) viršūnę ir kraštines.
21. Koks kampas vadinamas ištiestiniu?
22. Kaip žymimas kampas?
23. Paaiškinkite, ką reiškia sakinys: „Pustiesė eina tarp kampo kraštinių".
24. Kokiais vienetais matuojami kampai ir koks įrankis tam vartojamas? Paaiškinkite, kaip matuojamas kampas.
25. Pasakykite pagrindines kampų matavimo savybes.
26. Pasakykite pagrindines atkarpų ir kampų atidėjimo savybes.
27. Ką vadiname trikampiu?
28. Išvardykite trikampio (žr. 16 pav.) viršūnes ir kraštines.
29. Ką vadiname trikampio kampu prie nurodytosios viršūnės?
30. Kokios atkarpos vadinamos lygiomis?
31. Kokie kampai vadinami lygiais?
32. Ką reiškia sakinys: „Trikampis ABC lygus trikampiui $A_1B_1C_1$"? Kaip žymimas trikampių lygumas?
33. Kaip brėžinyje žymime lygių trikampių atitinkamas kraštines ir atitinkamus kampus?
34. Remdamiesi 18 paveikslu, paaiškinkite, kad egzistuoja trikampis, lygus duotam trikampiui.
35. Kokias tieses vadiname lygiagrečiomis? Kokiu ženklu žymimas tiesių lygiagretumas?
36. Pasakykite pagrindinę lygiagrečių tiesių savybę.
37. Ką vadiname įrodymu?
38. Ką vadiname teorema?
39. Pateikite teoremos ir jos įrodymo pavyzdį.
40. Pasakykite taškų ir tiesių priklausymo aksiomas.
41. Pasakykite atkarpų ir kampų matavimo aksiomas.
42. Pasakykite atkarpų ir kampų atidėjimo aksiomas.
43. Pasakykite trikampio, lygaus duotam trikampiui, egzistavimo aksiomą.
44. Kas pasakyta lygiagrečių tiesių aksioma?
45. Kokiais teiginiais leidžiama remtis, įrodant teoremą?
46. Kaip remiamasi brėžiniu, įrodant teoremą?
47. Iš kokių dviejų dalių sudaryta teoremos formuluotė?
48. Ką reiškia ką nors apibrėžti? Pasakykite atkarpų, kampų ir trikampių lygumo apibrėžimus.

PRATIMAI*

1. Nubrėžkite tiesę. Pažymėkite tašką A, priklausantį tiesei, ir tašką B, nepriklausantį tai tiesei.
2. Nubrėžkite dvi susikertančias tieses a ir b. Pažymėkite tų tiesių susikirtimo tašką C, tiesėje a tašką A, nepriklausantį tiesei b, ir tašką D, nepriklausantį nei tiesei a, nei tiesei b.
3. Popieriaus lape pažymėkite du taškus. Be liniuotės nubrėžkite per juos tiesę. Liniuote patikrinkite, ar teisingai nubrėžta. Pakartokite šį pratimą.
4. Popieriaus lape pažymėkite du taškus. Paskui iš akies pažymėkite trečią tašką, kuris nepriklauso tiesei, einančiai per pirmuosius du taškus. Liniuote patikrinkite, ar teisingai pažymėta. Pakartokite šį pratimą.
5. Nubrėžkite tiesę a. Pažymėkite joje taškus A ir B. Paskui pažymėkite tokį tašką C, kad taškas A būtų tarp taškų B ir C.
6. Nubrėžkite tiesę a. Pažymėkite tos tiesės taškus A ir B. Paskui pažymėkite kurį nors atkarpos AB tašką C.
7. Kiek susikirtimo taškų gali turėti dvi atkarpos, nesančios vienoje tiesėje? Pagrįskite atsakymą.
8. Nubrėžkite tiesę ir pažymėkite tašką A, nepriklausantį tai tiesei. Paskui pažymėkite tokius taškus B ir C, kad atkarpa AB kirstų tiesę, o atkarpa BC jos nekirstų.
9. Duota tiesė ir trys taškai A, B ir C, nepriklausantys tai tiesei. Žinome, kad atkarpa AB kerta tiesę, o atkarpa AC jos nekerta. Ar kerta tą tiesę atkarpa BC? Pagrįskite atsakymą.
10. Nubrėžta tiesė ir pažymėti keturi taškai A, B, C ir D, nepriklausantys tai tiesei. Ar kerta šią tiesę atkarpa AD, kai: 1) atkarpos AB, BC ir CD kerta tiesę; 2) atkarpos AC ir BC kerta tiesę, o atkarpa BD nekerta; 3) atkarpos AB ir CD kerta tiesę, o atkarpa BC nekerta; 4) atkarpos AB ir CD nekerta tiesės, o atkarpa BC kerta; 5) atkarpos AB, BC ir CD nekerta tiesės; 6) atkarpos AC, BC ir BD kerta tiesę? Pagrįskite atsakymą.
11. Nubrėžta tiesė ir pažymėti penki taškai, nepriklausantys šiai tiesei. Trys taškai yra vienoje pusplokštumėje tos tiesės atžvilgiu, o du taškai — kitoje pusplokštumėje. Kiekvieni du taškai sujungti atkarpa. Kiek atkarpų kerta tiesę? Pagrįskite atsakymą.
12. Pažymėkite taškus A ir B. Nubrėžkite pustiesę AB.
13. Atkarpoje AB yra taškas C. Pasakykite, kurios iš pustiesių AB, AC, CA ir CB sutampa ir kurios papildo viena kitą. Pagrįskite atsakymą.

---

* Daug šio vadovėlio pratimų paimta iš anksčiau vartotų vadovėlių ir uždavinynų, ypač iš A. Kiseliovo „Geometrijos" ir N. Rybkino „Geometrijos uždavinyno".

14. Taškas M yra tiesėje CD tarp taškų C ir D. Apskaičiuokite atkarpos CD ilgį, kai: 1) $CM=2{,}5$ cm, $MD=3{,}5$ cm; 2) $CM=3{,}1$ dm, $MD=4{,}6$ dm; 3) $CM=12{,}3$ m, $MD=5{,}8$ m.

15. Tiesėje pažymėkite du taškus. Iš akies pažymėkite atkarpos, jungiančios tuos taškus, vidurį. Matuodami liniuote, patikrinkite, ar teisingai pažymėta. Pakartokite šį pratimą.

16. Taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Žinome, kad $AB=4{,}3$ cm, $AC=7{,}5$ cm, $BC=3{,}2$ cm. Ar gali taškas A būti tarp taškų B ir C? Ar gali taškas C būti tarp taškų A ir B? Kuris iš taškų A, B ir C yra tarp kitų dviejų taškų?

17. Taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Ar priklauso taškas B atkarpai AC, kai: 1) $AC=5$ cm, $BC=7$ cm; 2) $AC=9{,}1$ m, $AB=9{,}2$ m; 3) $AB=3$ dm, $BC=4$ dm, $AC=7$ dm? Pagrįskite atsakymą.

18. Taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Ar gali taškas B skirti taškus A ir C, kai: 1) $AC=5$ cm, $AB=7$ cm; 2) $AC=7$ m, $BC=7{,}6$ m? Pagrįskite atsakymą.

19. Ar gali taškai A, B ir C priklausyti vienai tiesei, kai $AB=1{,}8$ m, $AC=1{,}3$ m, $BC=3$ m? Pagrįskite atsakymą.

20. Atstumai nuo taško A iki taškų B ir C lygūs 5 cm ir 7 cm, o atstumas tarp taškų B ir C lygus 6 cm. Ar gali taškai A, B ir C priklausyti vienai tiesei? Pagrįskite atsakymą.

21. Didžiausios atkarpos AB ilgis mažesnis už atkarpų AC ir BC ilgių sumą. Ar gali trys taškai A, B ir C priklausyti vienai tiesei? Pagrįskite atsakymą.

22. Taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Apskaičiuokite atkarpos BC ilgį, kai $AB=2{,}7$ m, $AC=3{,}2$ m. Kiek sprendinių turi šis uždavinys?

23. Atkarpoje AB yra taškas C. Kuri atkarpa ilgesnė: AB ar AC? Kodėl?

24. Ar gali taškas X priklausyti atkarpai AB, kai $AX>AB$? Pagrįskite atsakymą.

25. Atkarpoje AB, kurios ilgis lygus 15 m, pažymėtas taškas C. Apskaičiuokite atkarpų AC ir BC ilgius, kai: 1) atkarpos AC ilgis 3 m didesnis už atkarpos BC ilgį; 2) atkarpa AC dvigubai ilgesnė už atkarpą BC; 3) taškas C yra atkarpos AB vidurys; 4) atkarpų AC ir BC ilgių santykis lygus $2:3$.

26. Iš vieno taško nubrėžkite tris spindulius. Iš akies nustatykite tų spindulių sudaromų kampų laipsninį matą. Patikrinkite savo atsakymus, matuodami kampus matlankiu. Pakartokite šį pratimą.

27. Spindulys a eina tarp kampo (cd) kraštinių. Apskaičiuokite kampą (cd), kai: 1) $\angle(ac)=35°$, $\angle(ad)=75°$; 2) $\angle(ac)=57°$, $\angle(ad)=62°$; 3) $\angle(ac)=94°$, $\angle(ad)=85°$.

28. Ar gali spindulys c eiti tarp kampo (ab) kraštinių, kai: 1) $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$; 2) $\angle(ac)=100°$, $\angle(cb)=90°$; 3) kampas (ac) didesnis už kampą (ab)?

29. Spindulys c eina tarp kampo (ab) kraštinių. Kuris kampas didesnis: $\angle(ab)$ ar $\angle(ac)$? Kodėl?

30. Tarp kampo (ab), lygaus 60°, kraštinių eina spindulys c. Apskaičiuokite kampus (ac) ir (bc), kai: 1) kampo (ac) matas 30° didesnis už kampo (bc) matą; 2) kampas (ac) du kartus didesnis už kampą (bc); 3) spindulys c dalija kampą (ab) pusiau; 4) kampų (ac) ir (bc) laipsninių matų santykis lygus 2 : 3.

31. Nubrėžkite tiesę. Pažymėkite bet kurį jos tašką A. Paskui iš akies pažymėkite tašką B, kad būtų $AB=5$ cm. Liniuote patikrinkite, ar tiksliai pažymėtas taškas B. Pakartokite pratimą, kai: 1) $AB=3$ cm; 2) $AB=7$ cm; 3) $AB=10$ cm.

32. Iš akies nubraižykite 30°, 45°, 60° ir 90° kampus. Matlankiu patikrinkite, ar tiksliai nubraižyta. Pakartokite pratimą.

33. Ar pustiesėje AB yra toks taškas X, nesutampantis su tašku B, kad $AX=AB$? Pagrįskite atsakymą.

34. Tiesės AB taškas X nesutampa su B ir $AX=AB$. Kiek tokių taškų X yra? Pagrįskite atsakymą.

35. Spindulyje AB atidėta atkarpa AC, mažesnė už atkarpą AB. Kuris iš taškų A, B ir C yra tarp kitų dviejų? Pagrįskite atsakymą.

36. Spindulyje AB pažymėtas taškas C. Apskaičiuokite atkarpos BC ilgį, kai: 1) $AB=1{,}5$ m, $AC=0{,}3$ m; 2) $AB=2$ cm, $AC=4{,}4$ cm.

37. Iš akies nubraižykite trikampį, kurio kraštinės lygios viena kitai (lygiakraštį trikampį). Matuodami kraštines, patikrinkite, ar teisingai nubraižyta.

38. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D. Raskite kraštinės AB ilgį, kai $AD=5$ cm, o $BD=6$ cm.

39. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D. Apskaičiuokite trikampio kampą C, kai $\angle ACD=30°$, o $\angle BCD=70°$.

40. Nubraižykite bet kokį trikampį. Iš akies be liniuotės nubraižykite jam lygų trikampį. Matuodami atitinkamus kampus ir kraštines, patikrinkite, ar teisingai nubraižyta. Pakartokite pratimą.

41. Trikampis ABC lygus trikampiui PQR. Žinome, kad $AB=5$ cm, $BC=6$ cm, $AC=7$ cm. Raskite trikampio PQR kraštines. Pagrįskite atsakymą.

42. Trikampis ABC lygus trikampiui PQR. Žinome antrojo trikampio kampus: $\angle P=40°$, $\angle Q=60°$, $\angle R=80°$. Raskite trikampio ABC kampus.

43. Trikampis ABC lygus trikampiui PQR. Žinome, kad kraštinė AB lygi 10 m, o kampas C lygus 90°. Raskite kraštinę PQ ir kampą R. Pagrįskite atsakymą.

44. Trikampiai ABC, PQR ir XYZ lygūs. Žinome, kad $AB=5$ cm, $QR=6$ cm, $ZX=7$ cm. Raskite kitas kiekvieno trikampio kraštines.

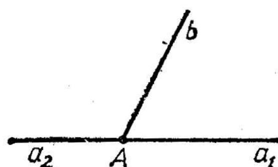
45. Ar gali tiesė, kertanti vieną iš lygiagrečių tiesių, nekirsti kitos? Pagrįskite atsakymą.
46. Nubrėžtos dvi susikertančios tiesės. Ar galima nubrėžti trečią tiesę, lygiagrečią abiem duotoms tiesėms?
47. Ar gali tiesė, neinanti per trikampio viršūnę, kirsti visas jo kraštines? Kodėl?
48. Duoti keturi taškai: A, B, C ir D. Žinome, kad taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei, o taškai B, C ir D — taip pat vienai tiesei. Įrodykite, kad visi keturi taškai priklauso vienai tiesei.
49. Duotos keturios tiesės: a, b, c ir d. Žinome, kad tiesės a, b ir c susikerta viename taške, o tiesės b, c ir d — taip pat viename taške. Įrodykite, kad visos keturios tiesės eina per vieną tašką.
50. Tiesė AB kerta atkarpą CD, o tiesė CD — atkarpą AB. Įrodykite, kad atkarpos AB ir CD susikerta.
51. Nubraižytas trikampis ABC. Kraštinėje AC pažymėtas taškas B_1, o kraštinėje BC — taškas A_1. Įrodykite, kad atkarpos AA_1 ir BB_1 susikerta.
52. Atkarpos AB ir CD, nesančios vienoje tiesėje, susikerta taške E. Įrodykite, kad atkarpa AC nekerta tiesės BD.

§ 2. KAMPAI

GRETUTINIAI KAMPAI

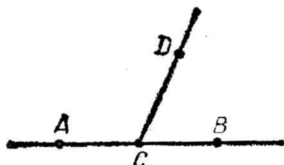
A p i b r ė ž i m a s. *Gretutiniais* kampais vadinami du kampai, kurių viena kraštinė yra bendra, o kitos dvi — papildomosios pustiesės.

22 paveiksle pavaizduoti gretutiniai kampai (a_1b) ir (a_2b). Jie turi bendrą kraštinę b, o kraštinės a_1 ir a_2 yra papildomosios pustiesės.



22 pav.

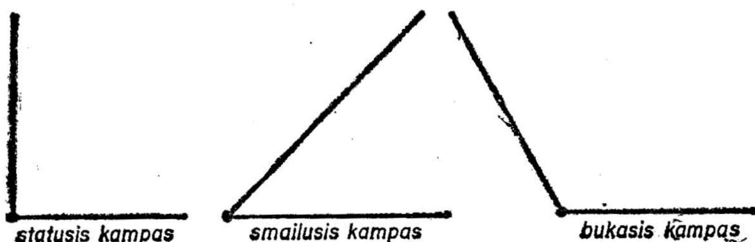
Sakykime, C yra tiesės AB taškas, esantis tarp taškų A ir B, o D — taškas, nepriklausantis tiesei AB (23 pav.). Tuomet kampai BCD ir ACD yra gretutiniai. Jų kraštinė CD bendra. Kraštinės CA ir CB yra tiesės AB papildomos pustiesės, nes tų pustiesių taškus A ir B skiria pradžios taškas C.



23 pav.

2.1 t e o r e m a. ***Gretutinių kampų suma lygi* 180°.**

Į r o d y m a s. Tarkime, kad $\angle(a_1b)$ ir $\angle(a_2b)$ yra duotieji gretutiniai kampai



24 pav.

(žr. 22 pav.). Spindulys b eina tarp ištiestinio kampo kraštinių a_1 ir a_2. Todėl kampų (a_1b) ir (a_2b) suma lygi ištiestiniam kampui, t. y. 180°. Teorema įrodyta.

Iš 2.1 teoremos aišku: ***jei kampai lygūs, tai lygūs ir jų gretutiniai kampai.***

Uždavinys (3). Raskite gretutinius kampus, kurių vienas kampas dukart didesnis už kitą.

Sprendimas. Mažesniojo kampo laipsninį matą pažymėkime raide x. Tuomet didesniojo kampo laipsninis matas bus $2x$. Kadangi tų kampų suma lygi 180°, tai

$$x+2x=180°.$$

Iš čia sužinome, kad $x=60°$. Vadinasi, tie gretutiniai kampai lygūs 60° ir 120°.

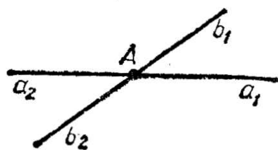
Kampas, lygus 90°, vadinamas *stačiuoju kampu.* Iš 2.1 teoremos aišku, kad *stačiojo kampo gretutinis kampas yra status.*

Kampas, mažesnis už 90°, vadinamas *smailiuoju kampu.* Kampas, didesnis už 90°, bet mažesnis už 180°, vadinamas *bukuoju kampu.* Kadangi gretutinių kampų suma lygi 180°, tai smailiojo kampo gretutinis kampas yra bukas, o bukojo kampo gretutinis kampas — smailus. 24 paveiksle pavaizduoti trijų rūšių kampai.

KRYŽMINIAI KAMPAI

Apibrėžimas. *Kryžminiais* kampais vadinami du kampai, kurių vieno kraštinės yra kito kraštinių papildomosios pustiesės.

25 paveiksle pavaizduoti kampai (a_1b_1) ir (a_2b_2) yra kryžminiai. Antro kampo kraštinės a_2 ir b_2 yra pirmo kampo kraštinių a_1 ir b_1 papildomosios pustiesės.



25 pav.

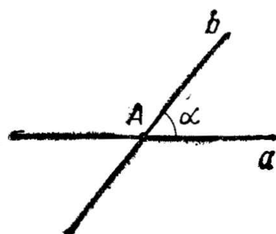
2.2 teorema. *Kryžminiai kampai yra lygūs.*

Įrodymas. Tarkime, kad (a_1b_1) ir (a_2b_2) yra duotieji kryžminiai kampai (žr. 25 pav.). Kampas (a_1b_2) yra gretutinis ir kampui (a_1b_1), ir kampui (a_2b_2). Pagal 2.1 teoremą kampai (a_1b_1) ir (a_2b_2) papildo kampą (a_1b_2) iki 180°. Todėl tie kampai lygūs. Teorema įrodyta.

Uždavinys (8). Dviejų kampų, gautų, susikirtus dviem tiesėms, suma lygi 50°. Apskaičiuokite tuos kampus.

Sprendimas. Kai susikerta dvi tiesės, gaunami kampai yra arba gretutiniai, arba kryžminiai. Nagrinėjamieji kampai negali būti gretutiniai, nes jų suma lygi 50°, o gretutinių kampų suma lygi 180°. Vadinasi, nagrinėjamieji kampai yra kryžminiai. Kadangi kryžminiai kampai yra lygūs, o pagal sąlygą jų suma lygi 50°, tai kiekvienas iš tų kampų lygus 25°.

STATMENOSIOS TIESĖS



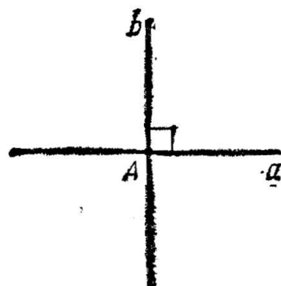
26 pav.

Dvi susikertančios tiesės a ir b (26 pav.) sudaro keturis kampus. Tarkime, kad vienas tų kampų yra α. Tuomet kiekvienas iš kitų trijų kampų bus arba kampui α gretutinis kampas, arba su juo kryžminis kampas. Iš to išplaukia: jei vienas iš tų kampų yra status, tai ir kiti trys kampai yra statūs. Tokiu atveju sakysime, kad tiesės susikerta stačiu kampu.

Apibrėžimas. *Statmenomis tiesėmis* vadinamos dvi tiesės, kurios susikerta stačiu kampu (27 pav.).

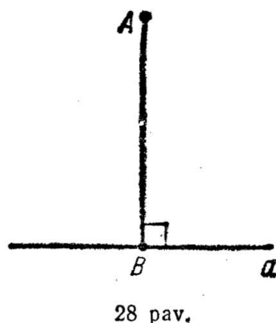
Tiesių statmenumą žymėsime ženklu $\perp$. Užrašą „$a \perp b$“ skaitome šitaip: „Tiesė a statmena tiesei b“.

Apibrėžimas. *Statmeniu* duotajai tiesei vadiname jai statmenos tiesės atkarpą, kurios galas yra tų tiesių susikirtimo taškas. Šis atkarpos galas vadinamas statmens *pagrindu*.



27 pav.

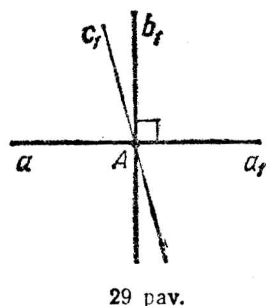
28 paveiksle statmuo AB išvestas iš taško A į tiesę a. Taškas B yra to statmens pagrindas.



28 pav.

2.3 teorema. ***Per kiekvieną tiesės tašką galima nubrėžti vieną ir tik vieną jai statmeną tiesę.***

Įrodymas. Tarkime, kad a yra duotoji tiesė, o A — jos duotasis taškas. Vieną tiesės a spindulį, kurio pradžia yra taškas A (29 pav.), pažymėkime a_1. Prie spindulio a_1 atidėkime kampą (a_1b_1), lygų 90°. Tuomet tiesė, kurioje yra spindulys b_1, bus statmena tiesei a.



29 pav.

Tarkime, kad egzistuoja kita tiesė, taip pat einanti per tašką A ir statmena tiesei a. Šios tiesės spindulį, esantį vienoje pusplokštumėje su spinduliu b_1, pažymėkime c_1.

Vadinasi, spindulio a_1, vienoje pusplokštumėje atidėti du kampai (a_1b_1) ir (a_1c_1), lygūs 90°. Tačiau nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti tik vieną kampą, lygų 90°. Todėl kitos tiesės, einančios per tašką A ir statmenos tiesei a, negali būti. Teorema įrodyta.

ĮRODYMAS PRIEŠTAROS METODU

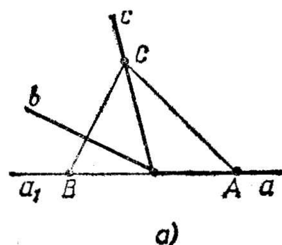
Įrodymo būdas, kurį taikėme 2.3 teoremai, vadinamas *įrodymu prieštaros metodu.* Šio metodo esmė tokia: iš pradžių darome prielaidą, priešingą teoremos išvadai. Paskui, remdamiesi aksiomomis ir anksčiau įrodytomis teoremomis, samprotaujame tol, kol gauname išvadą, prieštaraujančią arba teoremos sąlygai, arba kuriai nors aksiomai, arba anksčiau įrodytai teoremai. Iš to nustatome, kad prielaida buvo klaidinga, o teoremos išvada — teisinga.

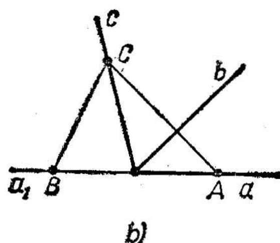
Paaiškinsime tai 2.3 teoremos įrodymo pavyzdžiu. Teoremoje tvirtinama, kad per kiekvieną tiesės tašką galima nubrėžti *tik vieną* jai statmeną tiesę. Tarę, kad galima nubrėžti dvi tokias tieses, priėjome išvadą, kad prie duoto spindulio duotoje pusplokštumėje galima atidėti du vienodo laipsninio mato (90°)

kampus. Tai prieštarauja kampų atidėjimo aksiomai, kurioje pasakyta, kad prie kiekvieno spindulio nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti *tik vieną* duoto laipsninio mato kampą.

KAMPAI, ATIDĖTI VIENOJE PUSPLOKŠTUMĖJE

2.4 teorema. ***Jei prie duoto spindulio vienoje pusplokštumėje atidėsime du kampus, tai mažesniojo kampo kraštinė, nesutampanti su duotu spinduliu, eis tarp didesniojo kampo kraštinių.***





30 pav.

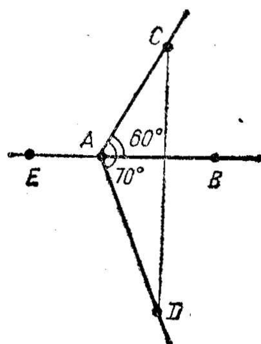
Įrodymas. Sakykime, $\angle(ab)$ ir $\angle(ac)$ yra kampai, atidėti prie spindulio a vienoje pusplokštumėje. Tarkime, kad kampas (ab) mažesnis už kampą (ac) (30 pav.). Įrodysime, kad spindulys b eina tarp kampo (ac) kraštinių.

Spindulį, papildomąjį spinduliui a, pažymėsime a_1. Spindulyje a pažymėsime kurį nors tašką A, spindulyje a_1 — tašką B, o spindulyje c — tašką C.

Tiesė, kurioje yra spindulys b, kerta trikampio ABC kraštinę AB. Todėl jis kerta vieną iš kitų dviejų kraštinių: arba AC, arba BC. Susikirtimo taškas priklauso spinduliui b, nes papildomasis spindulys yra kitoje pusplokštumėje.

Tarkime, kad spindulys b kerta atkarpą BC. Tuomet jis eina tarp kampo (a_1c) kraštinių (30 pav., *a*). Tokiu atveju kampas (a_1c) yra didesnis už kampą (a_1b), o kampo (a_1c) gretutinis kampas (ac) mažesnis už kampo (a_1b) gretutinį kampą (ab). Tai prieštarauja teoremos sąlygai. Vadinasi, spindulys b nekerta atkarpos BC. Todėl jis kerta atkarpą AC (30 pav., *b*), t. y. eina tarp kampo (ac) kraštinių. Teorema įrodyta.

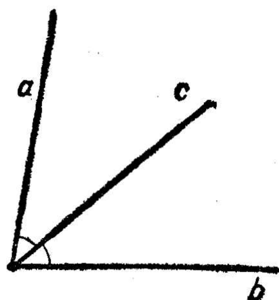
Iš tos teoremos gauname išvadą: *jei kampai (ab) ir (ac) atidėti vienoje pusplokštumėje prie pustiesės* ***a****, tai kampas (bc) lygus kampų (ac) ir (ab) skirtumui.*



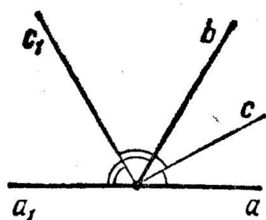
31 pav.

Uždavinys (16). Prie pustiesės AB skirtingose pusplokštumėse atidėti du kampai: $\angle BAC = 60°$ ir $\angle BAD = 70°$. Raskite kampą CAD.

Sprendimas. Kadangi taškai C ir D yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AB atžvilgiu, tai atkarpa CD kerta šią tiesę (31 pav.). Vadinasi, spindulys AB arba jo papildomasis spindulys AE eina tarp kampo CAD kraštinių. Todėl kampas CAD lygus arba kampų BAC ir BAD sumai, arba jų gretutinių kampų EAC ir EAD sumai. Pirmuoju atveju jis lygus $60° + 70° = 130°$, antruoju $(180° - 60°) + (180° - 70°) = 230°$. Antrasis atvejis negalimas, nes kampo laipsninis matas nebūna didesnis už 180°. Vadinasi, kampas CAD lygus 130°.



32 pav.



33 pav.

Apibrėžimas. Kampo *pusiaukampine* vadiname spindulį, kuris išeina iš jo viršūnės, eina tarp jo kraštinių ir dalija kampą pusiau.

32 paveiksle matote kampą (ab). Spindulys c išeina iš to kampo viršūnės, eina tarp jo kraštinių ir dalija kampą pusiau: $\angle(ac) = \angle(bc)$. Spindulys c yra kampo (ab) pusiaukampinė.

Uždavinys (20). Raskite kampą tarp gretutinių kampų pusiaukampinių.

Sprendimas. Sakykime, kampas (a_1b) yra kampo (ab) gretutinis kampas, o c_1 ir c — jų pusiaukampinės (33 pav.). Kampą (ab) pažymėję raide x, kampus (ac) ir (ac_1) išreikšime kampu x. Tie kampai atidėti vienoje pusplokštumėje prie pustiesės a, todėl kampas (cc_1) lygus tų kampų skirtumui. Kadangi

$$\angle(ac) = \frac{x}{2}, \quad \angle(ac_1) = 180° - \angle(a_1c_1) = 180° - \frac{1}{2}\angle(a_1b) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle(ab)) = 180° - \frac{1}{2}(180° - x) = 90° + \frac{x}{2},$$

tai $\angle(cc_1) = \angle(ac_1) - \angle(ac) = 90° + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 90°$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kokie kampai vadinami gretutiniais?
2. Paaiškinkite, kodėl kampai DCA ir DCB (žr. 23 pav.) yra gretutiniai.
3. Įrodykite, kad gretutinių kampų suma lygi 180°.
4. Įrodykite, kad lygių kampų gretutiniai kampai yra lygūs.
5. Kokį kampą vadiname stačiuoju (smailiuoju, bukuoju)?
6. Įrodykite, kad stačiojo kampo gretutinis kampas yra status.
7. Kokie kampai vadinami kryžminiais?
8. Įrodykite, kad kryžminiai kampai yra lygūs.
9. Įrodykite teiginį: jei, susikirtus dviem tiesėms, vienas susidariusių kampų yra status, tai kiti trys kampai irgi yra statūs.
10. Kokios tiesės vadinamos statmenomis? Kokiu ženklu žymimas tiesių statmenumas?
11. Ką vadiname statmeniu tiesei?
12. Įrodykite, kad per kiekvieną tiesės tašką galima nubrėžti tik vieną jai statmeną tiesę.
13. Paaiškinkite, kaip įrodinėjama prieštaros metodu.
14. Įrodykite kampų, atidėtų vienoje pusplokštumėje, teoremą.
15. Ką vadiname kampo pusiaukampine?

PRATIMAI

1. Raskite kampus, gretutinius šiems kampams: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.
2. Ar gali abu gretutiniai kampai būti: 1) smailūs; 2) buki; 3) statūs? Pagrįskite atsakymą.
3. Raskite gretutinius kampus, kurių vienas kampas dukart didesnis už kitą.
4. Raskite gretutinius kampus, kurių: 1) vieno laipsninis matas 30° didesnis už kito; 2) skirtumas lygus 40°; 3) vienas 3 kartus mažesnis už kitą.
5. Raskite gretutinius kampus, kurių laipsninių matų santykis lygus: 1) 2 : 3; 2) 3 : 7; 3) 11 : 25; 4) 22 : 23.
6. Vienas kampas, gautas, susikirtus dviem tiesėms, lygus 30°. Apskaičiuokite kitus kampus.
7. Raskite kampą, kurio dviejų gretutinių kampų suma lygi 100°.
8. Dviejų kampų, gautų, susikirtus dviem tiesėms, suma lygi 50°. Apskaičiuokite tuos kampus.
9. Vienas kampas, gautas, susikirtus dviem tiesėms, yra 4 kartus didesnis už kitą. Raskite tuos kampus.
10. Vienas kampas, gautas, susikirtus dviem tiesėms, yra 50° mažesnis už kitą. Raskite tuos kampus.

11. Raskite kampus, kurie gaunami, susikirtus dviem tiesėms, kai trijų kampų suma lygi 270°.

12. Įrodykite teiginį: jei trys iš keturių kampų, gautų, susikirtus dviem tiesėms, yra lygūs, tai tos tiesės yra statmenos.

13. Ar spindulys c eina tarp kampo (ab) kraštinių, kai: 1) $\angle(ab)=40°$, $\angle(ac)=50°$; 2) kampai (ac) ir (bc) yra buki?

14. Kampas (aa_1) yra ištiestinis. Iš jo viršūnės vienoje pusplokštumėje nubrėžti spinduliai b ir c. Raskite kampą (bc), kai: 1) $\angle(ab)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 2) $\angle(a_1b)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 3) $\angle(ab)=60°$, $\angle(a_1c)=30°$.

15. Kampas (aa_1) yra ištiestinis. Iš jo viršūnės vienoje pusplokštumėje nubrėžti spinduliai b ir c. Žinome, kad $\angle(ab)=60°$, o $\angle(ac)=30°$. Apskaičiuokite kampus (a_1b), (a_1c) ir (bc).

16. Prie pustiesės AB skirtingose pusplokštumėse atidėti du kampai: $\angle BAC=60°$ ir $\angle BAD=70°$. Raskite kampą CAD.

17. Prie pustiesės AB skirtingose pusplokštumėse atidėti kampai BAC ir BAD. Raskite kampą CAD, kai: 1) $\angle BAC=80°$, $\angle BAD=170°$; 2) $\angle BAC=87°$, $\angle BAD=98°$; 3) $\angle BAC=140°$, $\angle BAD=30°$.

18. Apskaičiuokite kampą tarp duotojo kampo kraštinės ir jo pusiaukampinės, kai duotasis kampas lygus: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°.

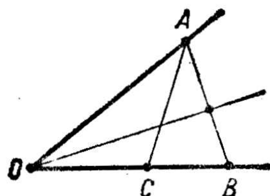
19. Raskite kampą, kurio pusiaukampinė su kraštine sudaro kampą, lygų: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°.

20. Raskite kampą tarp gretutinių kampų pusiaukampinių.

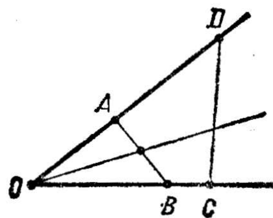
21. Įrodykite, kad kryžminių kampų pusiaukampinės yra vienoje tiesėje.

22. Raskite kampą, kurį sudaro duotojo kampo pusiaukampinė su vienos jo kraštinės tęsiniu, kai duotasis kampas lygus: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

23. Įrodykite: jei spindulys, nubrėžtas iš kampo viršūnės, kerta atkarpą AB, kurios galai yra kampo kraštinėse, tai jis kerta: 1) atkarpą AC, kurios galai yra kampo kraštinėse (34 pav.); 2) bet kurią atkarpą CD, kurios galai yra kampo kraštinėse (35 pav.).



34 pav.



35 pav.

§ 3. TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIAI

PIRMASIS TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIS

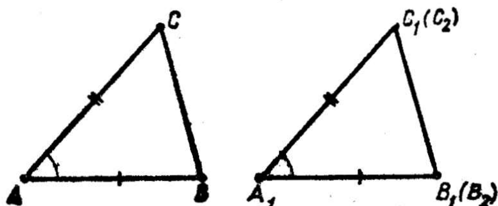
3.1 teorema (trikampių lygumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). ***Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tie trikampiai lygūs.***

Įrodymas. Tarkime, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra tokie, kad $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (36 pav.). Įrodysime, kad tie trikampiai lygūs, t. y. įsitikinsime, kad $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$.

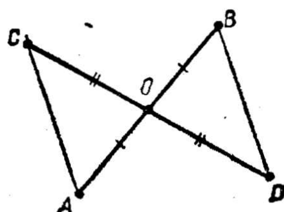
Pagal trikampio, lygaus duotajam trikampiui, egzistavimo aksiomą turi būti trikampiui ABC lygus trikampis $A_1B_2C_2$, kurio viršūnė B_2 priklauso spinduliui A_1B_1, o viršūnė C_2 yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės A_1B_1 atžvilgiu, kaip ir viršūnė C_1. Kadangi $A_1B_1 = A_1B_2$, tai taškas B_2 sutampa su tašku B_1 (atkarpų atidėjimo aksioma). Kadangi $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, tai spindulys A_1C_2 sutampa su spinduliu A_1C_1 (kampų atidėjimo aksioma). Kadangi $A_1C_1 = A_1C_2$, tai viršūnė C_2 sutampa su viršūne C_1. Vadinasi, trikampis $A_1B_1C_1$ sutampa su trikampiu $A_1B_2C_2$. Todėl jis lygus trikampiui ABC. Teorema įrodyta.

Uždavinys (1). Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, kuris yra abiejų atkarpų vidurio taškas. Raskite atkarpą BD, kai $AC = 10$ m.

Sprendimas. Trikampiai AOC ir BOD lygūs pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį (37 pav.). Jų kampai AOC ir BOD lygūs kaip kryžminiai; $OA = OB$ ir $OC = OD$, nes taškas O yra atkarpų AB ir CD vidurys. Kadangi trikampiai AOC ir BOD lygūs, tai jų atitinkamos kraštinės AC ir BD lygios. Iš uždavinio sąlygos žinome, kad $AC = 10$ m, todėl $BD = 10$ m.



36 pav.



37 pav.

ANTRASIS TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIS

3.2 t e o r e m a (trikampių lygumo požymis pagal kraštinę ir prie jos esančius kampus). ***Jei vieno trikampio kraštinė ir prie jos esantys kampai atitinkamai lygūs kito trikampio kraštinei ir prie jos esantiems kampams, tai tie trikampiai lygūs.***

Į r o d y m a s. Tarkime, kad ABC ir $A_1B_1C_1$ yra trikampiai, kurių $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$ ir $\angle B=\angle B_1$ (38 pav.). Įrodysime, kad tie trikampiai lygūs, t. y. įsitikinsime, kad $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ ir $\angle C=\angle C_1$.

Remiantis trikampio, lygaus duotam trikampiui, egzistavimo aksioma, turi būti trikampiui ABC lygus trikampis $A_1B_2C_2$, kurio viršūnė B_2 priklauso spinduliui A_1B_1, o viršūnė C_2 yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės A_1B_1 atžvilgiu, kaip ir viršūnė C_1. Kadangi $A_1B_2=A_1B_1$, tai viršūnė B_2 sutampa su viršūne B_1. Kadangi $\angle B_1A_1C_2=\angle B_1A_1C_1$ ir $\angle A_1B_1C_2=\angle A_1B_1C_1$, tai pagal kampų atidėjimo aksiomą spindulys A_1C_2 sutampa su spinduliu A_1C_1, o spindulys B_1C_2 — su spinduliu B_1C_1. Iš to išplaukia, kad viršūnė C_2 sutampa su viršūne C_1. Vadinasi, trikampis $A_1B_1C_1$ sutampa su trikampiu $A_1B_2C_2$, todėl jis lygus trikampiui ABC. Teorema įrodyta.

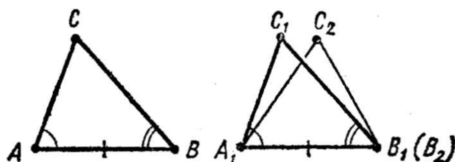
LYGIAŠONIS TRIKAMPIS

Lygiašoniu trikampiu vadinamas trikampis, turintis dvi lygias kraštines. Lygiosios kraštinės vadinamos jo *šoninėmis kraštinėmis*; trečioji kraštinė vadinama lygiašonio trikampio *pagrindu*.

39 paveiksle pavaizduotas lygiašonis trikampis ABC. Jo šoninės kraštinės yra AC ir BC, o pagrindas — kraštinė AB.

3.3 t e o r e m a. ***Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.***

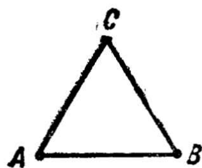
Į r o d y m a s. Tarkime, kad ABC yra lygiašonis trikampis, kurio pagrindas yra AB (žr. 39 pav.). Įrodysime, kad $\angle A=\angle B$.



38 pav.



39 pav.



40 pav.

Trikampis CAB lygus trikampiui CBA pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį, nes $CA=CB$, $CB=CA$, $\angle C=\angle C$. Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $\angle A=\angle B$. Teorema įrodyta.

Trikampis, kurio visos kraštinės lygios, vadinamas *lygiakraščiu*.

Uždavinys (13). Įrodykite, kad visi lygiakraščio trikampio kampai lygūs.

Sprendimas. Sakykime, trikampio ABC visos kraštinės lygios: $AB=BC=CA$ (40 pav.). Kadangi $AB=BC$, tai tas trikampis yra lygiašonis, o kraštinė AC — jo pagrindas. Iš 3.3 teoremos aišku, kad $\angle C=\angle A$. Kadangi $BC=CA$, tai trikampis ABC yra lygiašonis, o kraštinė AB — jo pagrindas. Iš 3.3 teoremos išplaukia, kad $\angle A=\angle B$. Vadinasi, $\angle C=\angle A=\angle B$, t. y. visi trikampio kampai lygūs.

3.4 teorema. ***Jei trikampis turi du lygius kampus, tai jis yra lygiašonis.***

Įrodymas. Sakykime, ABC yra toks trikampis, kad $\angle A=\angle B$ (žr. 39 pav.). Įrodysime, kad jis yra lygiašonis, o kraštinė AB — jo pagrindas. Trikampis ABC lygus trikampiui BAC pagal antrąjį trikampių lygumo požymį, nes $AB=BA$, $\angle B=\angle A$, $\angle A=\angle B$. Iš trikampių lygumo išsiaiškiname, kad $AC=BC$. Teorema įrodyta.

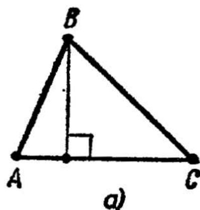
3.4 teorema vadinama ***atvirkštine*** 3.3 teoremai. Mat 3.3 teoremos išvada yra 3.4 teoremos sąlyga, o 3.3 teoremos sąlyga — 3.4 teoremos išvada. Ne kiekviena teorema turi atvirkštinę, t. y. kai teorema teisinga, atvirkštinė teorema gali būti klaidinga. Paaiškinsime tai kryžminių kampų teoremos pavyzdžiu. Šią teoremą galima pasakyti šitaip: jei du kampai kryžminiai, tai jie yra lygūs. Atvirkštinė teorema bus šitokia: jei du kampai lygūs, tai jie yra kryžminiai. Šis teiginys, aišku, nėra teisingas: du lygūs kampai gali nebūti kryžminiai.

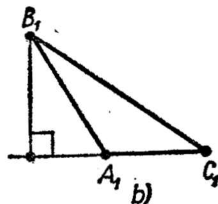
Uždavinys (14). Suformuluokite ir įrodykite teoremą, atvirkštinę 13 uždavinio teiginiui.

Sprendimas. 13 uždavinio sąlygoje pasakyta, kad trikampis yra lygiakraštis, t. y. kad visos jo kraštinės lygios. Išvadoje buvo sakoma, kad visi to trikampio kampai lygūs. Todėl atvirkštinę teoremą reikia formuluoti šitaip: jei visi trikampio kampai ly-

gūs, tai ir visos jo kraštinės lygios. Įrodysime tą teoremą.

Tarkime, kad trikampis ABC turi lygius kampus: $\angle A = \angle B = \angle C$. Kadangi $\angle A = \angle B$, tai iš 3.4 teoremos aišku, kad $AC = CB$. Kadangi $\angle B = \angle C$, tai pagal tą pačią teoremą $AC = AB$. Vadinasi, $AB = AC = CB$, t. y. visos to trikampio kraštinės lygios.

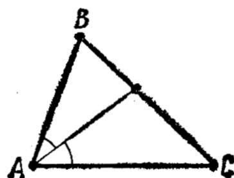




41 pav.

TRIKAMPIO PUSIAUKRAŠTINĖ, PUSIAUKAMPINĖ IR AUKŠTINĖ

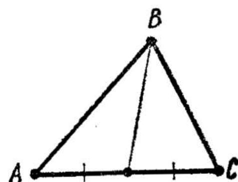
Statmenį, išvestą iš trikampio viršūnės į tiesę, kurioje yra prieš viršūnę esanti kraštinė, vadiname trikampio *aukštine*. 41 paveiksle matote du trikampius, kuriuose nubrėžtos aukštinės iš viršūnių B ir B_1. Trikampio ABC aukštinės pagrindas yra pačioje kraštinėje, o trikampio $A_1B_1C_1$ — kraštinės tęsinyje.



42 pav.

Trikampio kampo pusiaukampinės atkarpą, kuri jungia trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės tašku, vadiname trikampio *pusiaukampine* (42 pav.).

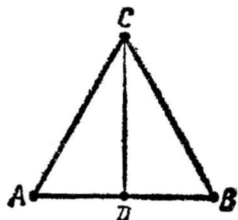
Atkarpą, kuri jungia trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės viduriu, vadiname trikampio *pusiaukraštine* (43 pav.).



43 pav.

3.5 teorema. ***Lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, sutampa su pusiaukampine ir aukštine.***

Įrodymas. Tarkime, kad ABC yra lygiašonis trikampis, jo pagrindas AB (44 pav.), o CD — jo pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą. Trikampiai CAD ir CBD lygūs pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį. (Kraštinės AC ir BC lygios, nes trikampis ABC lygiašonis. Kampai CAD ir



44 pav.

CBD lygūs pagal 3.3 teoremą. Kraštinės AD ir BD lygios, nes taškas D — atkarpos AB vidurys.)

Kadangi trikampiai lygūs, tai jų atitinkami kampai lygūs: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Kadangi kampai ACD ir BCD lygūs, tai CD yra pusiaukampinė. Kadangi gretutiniai kampai ADC ir BDC lygūs, tai jie statūs; todėl CD — trikampio aukštinė. Teorema įrodyta.

Uždavinys (27). Įrodykite, kad lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės, esančios prieš pagrindą, sutampa su pusiaukraštine ir aukštine.

Sprendimas. Tarkime, kad ABC yra lygiašonis trikampis, CD — jo pusiaukampinė, nubrėžta į pagrindą AB (žr. 44 pav.). Trikampiai ACD ir BCD lygūs pagal antrąjį požymį. Jų kraštinės AC ir BC lygios kaip lygiašonio trikampio ABC šoninės kraštinės; kampai prie viršūnės C lygūs todėl, kad CD yra kampo ACB pusiaukampinė; kampai prie viršūnių A ir B lygūs kaip lygiašonio trikampio ABC kampai prie pagrindo. Kadangi trikampiai lygūs, tai jų atitinkamos kraštinės AD ir BD lygios. Vadinasi, CD yra trikampio ABC pusiaukraštinė. Pagal 3.5 teoremą ji yra ir aukštinė.

TREČIASIS TRIKAMPIŲ LYGUMO POŽYMIS

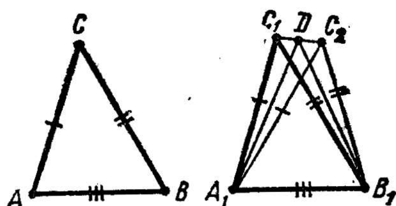
3.6 teorema (trikampių lygumo požymis pagal tris kraštines). ***Jei visos vieno trikampio kraštinės atitinkamai lygios kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai lygūs.***

Įrodymas. Tarkime, kad ABC ir $A_1B_1C_1$ yra tokie trikampiai, kad $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (45 pav.). Įrodysime, kad tie trikampiai lygūs.

Pagal trikampio, lygaus duotajam trikampiui, egzistavimo aksiomą yra trikampiui ABC lygus trikampis $A_1B_1C_2$, kurio viršūnė C_2 yra toje pačioje pusplokštumėje tiesės A_1B_1 atžvilgiu, kaip ir viršūnė C_1 (45 pav.).

Tarkime, kad viršūnė C_2 nepriklauso nei spinduliui A_1C_1, nei spinduliui B_1C_1, o D yra atkarpos C_1C_2 vidurio taškas. Trikampiai $A_1C_1C_2$ ir $B_1C_1C_2$ yra lygiašoniai ir turi bendrą pagrindą C_1C_2. Iš 3.5 teoremos išplaukia, kad jų pusiaukraštinės A_1D ir B_1D yra aukštinės. Vadinasi, tiesės A_1D ir B_1D statmenos tiesei

C_1C_2. Kadangi per tiesės C_1C_2 tašką D galima nubrėžti tik vieną jai statmeną tiesę (2.3 teorema), tai tos tiesės turi sutapti. Tačiau jos nesutampa, nes taškas D nėra tiesėje A_1B_1. Gavome prieštarą. Vadinasi, viršūnė C_2 priklauso arba spinduliui A_1C_1, arba spinduliui B_1C_1. Pirmuoju atveju taškas C_2 sutampa su C_1, nes $A_1C_1=AC$. Tai reiškia, kad trikampis ABC lygus trikampiui $A_1B_1C_1$. Antruoju atveju irgi panašiai įsitikiname, kad tie trikampiai lygūs. Teorema įrodyta.



45 pav.

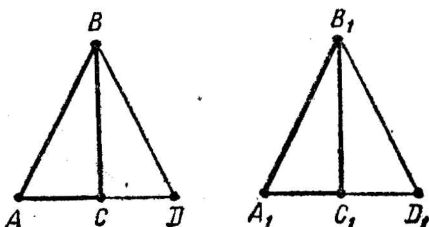
Uždavinys (28). Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra tokie, kad $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ ir $\angle C=\angle C_1=90°$. Įrodykite, kad $\triangle ABC=$ $=\triangle A_1B_1C_1$.

Sprendimas. Kraštinės AC tęsinyje nubrėžiame atkarpą CD, lygią atkarpai AC (46 pav.). Trikampiai ABC ir DBC lygūs pagal pirmąjį požymį; jų kampai prie viršūnės C statūs, taigi ir lygūs, kraštinė BC bendra, o kraštinės AC ir CD lygios, nes tokias nubrėžėme. Kadangi trikampiai lygūs, tai atitinkamos kraštinės AB ir DB lygios.

Kraštinės A_1C_1 tęsinyje nubrėžiame atkarpą C_1D_1, lygią kraštinei A_1C_1. Kaip įrodėme, kad trikampis ABC lygus trikampiui DBC, taip galima įrodyti, kad trikampis $A_1B_1C_1$ lygus trikampiui $D_1B_1C_1$. Iš to, kad trikampiai lygūs, išplaukia, jog jų atitinkamos kraštinės lygios: $A_1B_1=D_1B_1$.

Remdamiesi trečiuoju požymiu, įsitikiname, kad trikampis ABD lygus trikampiui $A_1B_1D_1$. Iš tikrųjų, $AB=A_1B_1$ (pasakyta sąlygoje); $BD=B_1D_1$, nes $BD=AB$, o $B_1D_1=A_1B_1$; pagaliau $AD=A_1D_1$, nes $AC=A_1C_1$. Kadangi trikampiai ABD ir $A_1B_1D_1$ lygūs, tai atitinkami jų kampai lygūs: $\angle A=$ $=\angle A_1$.

Dabar, remdamiesi pirmuoju požymiu, įsitikiname, kad pradiniai trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ (pasakyta sąlygoje), $\angle A=\angle A_1$ (įrodėme).



46 pav.

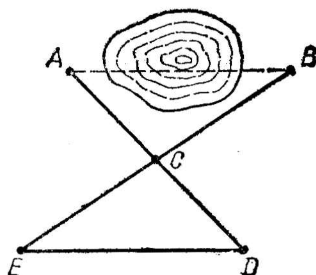
KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Suformuluokite ir įrodykite pirmąjį trikampių lygumo požymį.
2. Suformuluokite ir įrodykite antrąjį trikampių lygumo požymį.
3. Kokį trikampį vadiname lygiašoniu? Kurios lygiašonio trikampio kraštinės vadinamos šoninėmis kraštinėmis? Kuri kraštinė vadinama pagrindu?
4. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs.
5. Kokį trikampį vadiname lygiakraščiu?
6. Įrodykite teiginį: jei du trikampio kampai lygūs, tai tas trikampis yra lygiašonis.
7. Paaiškinkite, ką vadiname atvirkštine teorema. Pateikite pavyzdį. Ar kiekviena teorema turi atvirkštinę teoremą?
8. Ką vadiname trikampio aukštine?
9. Ką vadiname trikampio pusiaukampine?
10. Ką vadiname trikampio pusiaukraštine?
11. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, yra pusiaukampinė ir aukštinė.
12. Įrodykite trečiąjį trikampių lygumo požymį.

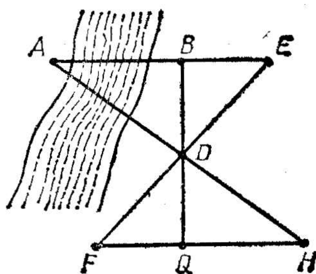
PRATIMAI

1. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, kuris yra abiejų atkarpų vidurio taškas. Raskite atkarpą BD, kai $AC=10$ m.
2. Per atkarpos AB vidurį nubrėžta tiesė, statmena tiesei AB. Įrodykite, kad kiekvienas tos tiesės taškas yra vienodai nutolęs nuo taškų A ir B.
3. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas yra kraštinė AB. Iš viršūnės C nubrėžtos lygios atkarpos: CA_1 kraštinėje CA ir CB_1 kraštinėje CB. Įrodykite, kad lygūs šie trikampiai: 1) CAB_1 ir CBA_1; 2) ABB_1 ir BAA_1.
4. Lygiašonio trikampio ABC pagrinde AB pažymėti taškai A_1 ir B_1. Yra žinoma, kad $AB_1=BA_1$. Įrodykite, kad trikampis AB_1C lygus trikampiui BA_1C.
5. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D, o trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinėje A_1B_1 — taškas D_1. Yra žinoma, kad trikampis ADC lygus trikampiui $A_1D_1C_1$, o atkarpa DB lygi atkarpai D_1B_1. Įrodykite, kad trikampis ABC lygus trikampiui $A_1B_1C_1$.
6. Norėdami sužinoti atstumą tarp dviejų vietovės taškų A ir B (47 pav.), kai iš vieno taško neįmanoma tiesiai nueiti į kitą, pasirenkame tašką C, iš kurio galima tiesiai nueiti ir į tašką A, ir į tašką B ir iš kurio matomi abu tie taškai. Paskui gairėmis nusmaigstome atkarpas AC ir BC, pratęsiame jas už taško C ir atmatuojame $CD=AC$ ir $EC=CB$. Tuomet atkarpos ED ilgis lygus ieškomajam atstumui. Kodėl?

7. Norėdami sužinoti atstumą, tarp dviejų vietovės taškų A ir B, kai prie vieno taško (taško A) neįmanoma prieiti, nusmaigstome gairėmis atkarpos AB kryptį (48 pav.) ir jos tęsinyje išmatuojame bet kurią atkarpą BE. Paskui pasirenkame tašką D, iš kurio matomas taškas A ir galima nueiti į taškus B ir E. Nusmaigstę gairėmis tieses BDQ ir EDF, atmatuojame $FD=DE$ ir $DQ=BD$. Po to, žiūrėdami į tašką A, einame tiese FQ, kol randame tašką H, esantį tiesėje AD. Tuomet atkarpos HQ ilgis lygus ieškomajam atstumui. Įrodykite.



47 pav.



48 pav.

8. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O. Įrodykite, kad trikampis ACO lygus trikampiui DBO, kai kampas ACO lygus kampui DBO ir $BO=CO$.
9. Atkarpos AC ir BD susikerta taške O. Įrodykite, kad trikampis BAO lygus trikampiui DCO, kai kampas BAO lygus kampui DCO ir $AO=CO$.
10. Lygiašonio trikampio perimetras (kraštinių ilgių suma) lygus 1 m, o pagrindo ilgis lygus 0,4 m. Apskaičiuokite šoninės kraštinės ilgį.
11. Lygiašonio trikampio perimetras lygus 7,5 m, o šoninė kraštinė lygi 2 m. Apskaičiuokite pagrindo ilgį.
12. Lygiašonio trikampio perimetras lygus 15,6 m. Apskaičiuokite jo kraštinių ilgius, kai: 1) pagrindas trimis metrais trumpesnis už šoninę kraštinę; 2) pagrindas trimis metrais ilgesnis už šoninę kraštinę.
13. Įrodykite, kad visi lygiakraščio trikampio kampai lygūs.
14. Suformuluokite ir įrodykite teoremą, atvirkštinę 13 uždavinio teiginiui.
15. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai C_1 ir C_2. Trikampis ABC_1 lygus trikampiui BAC_2. Įrodykite, kad trikampis ABC yra lygiašonis.
16. Trikampis ACC_1 lygus trikampiui BCC_1. Jų viršūnės A ir B yra skirtingose pusplokštumėse tiesės CC_1 atžvilgiu. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir ABC_1 yra lygiašoniai.
17. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio kraštinių vidurio taškai yra kito lygiašonio trikampio viršūnės.
18. Įrodykite, kad lygiakraščio trikampio kraštinių vidurio taškai yra kito lygiakraščio trikampio viršūnės.

19. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio: 1) pusiaukampinės, nubrėžtos iš viršūnių prie pagrindo, yra lygios; 2) pusiaukraštinės, nubrėžtos iš tų pačių viršūnių, yra lygios.

20. Įrodykite, kad lygių trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$: 1) pusiaukraštinės, nubrėžtos iš viršūnių A ir A_1, yra lygios; 2) pusiaukampinės, nubrėžtos iš viršūnių A ir A_1, yra lygios.

21. Taškai A, B, C ir D priklauso vienai tiesei, o atkarpos AB ir CD turi bendrą vidurio tašką. Įrodykite: jei trikampis ABE yra lygiašonis, o AB — jo pagrindas, tai trikampis CDE irgi yra lygiašonis, o CD — jo pagrindas.

22. Įrodykite, kad trikampiai yra lygūs, jei vieno trikampio kampas, jo pusiaukampinė ir kraštinė, esanti prie to kampo, yra lygūs atitinkamiems kito trikampio elementams.

23. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas yra kraštinė AC. Jo pusiaukraštinėje BM pažymėtas taškas D. Įrodykite, kad: 1) trikampis ABD lygus trikampiui CBD; 2) trikampis AMD lygus trikampiui CMD.

24. Įrodykite, kad trikampis ABC yra lygiašonis, kai: 1) pusiaukraštinė BD sutampa su aukštine; 2) aukštinė BD sutampa su pusiaukampine.

25. Du lygiašoniai trikampiai turi bendrą pagrindą. Įrodykite, kad jų pusiaukraštinės, išvestos į pagrindą, yra vienoje tiesėje.

26. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas yra kraštinė AC. Apskaičiuokite pusiaukraštinės BD ilgį, kai trikampių ABC ir ABD perimetrai atitinkamai lygūs 50 m ir 40 m.

27. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio pusiaukampinė, nubrėžta iš viršūnės, esančios prieš pagrindą, sutampa su pusiaukraštine ir aukštine.

28. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra tokie, kad $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ ir $\angle C=\angle C_1=90°$. Įrodykite, kad $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

29. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio aukštinė, nuleista į pagrindą, sutampa su pusiaukraštine ir pusiaukampine.

30. Lygiašoniai trikampiai ABC ir ABC_1 turi bendrą pagrindą AB. Įrodykite, kad trikampis ACC_1 lygus trikampiui BCC_1.

31. Taškai A, B, C ir D priklauso vienai tiesei. Trikampis ABE_1 lygus trikampiui ABE_2. Įrodykite, kad trikampis CDE_1 lygus trikampiui CDE_2.

32. Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, kuris yra abiejų atkarpų vidurio taškas. Įrodykite, kad trikampis ACD lygus trikampiui BDC.

33. Įrodykite: jei vieno trikampio dvi kraštinės, pusiaukraštinė, išvesta į vieną jų, lygios kito trikampio atitinkamoms dviem kraštinėms ir pusiaukraštinei, tai tie trikampiai lygūs.

34. Atkarpos AB ir CD susikerta. Atkarpos AC, CB, BD ir AD lygios. Įrodykite, kad spindulys AB yra kampo CAD pusiaukampinė, o spindulys CD — kampo ACB pusiaukampinė.

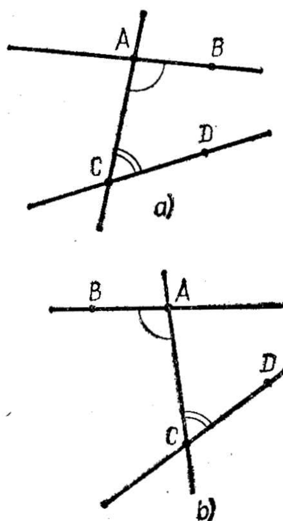
35. Įrodykite, kad 34 uždavinyje nurodytos tiesės AB ir CD yra statmenos.
36. Lygių trikampių ABC ir BAD viršūnės C ir D yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AB atžvilgiu. Įrodykite, kad: 1) trikampis CBD lygus trikampiui DAC; 2) tiesė CD dalija atkarpą AB pusiau.
37. Dvi vienodo ilgio atkarpos AB ir CD susikerta taške O; $AO = OD$. Įrodykite, kad trikampis ABC lygus trikampiui DCB.
38. Įrodykite, kad du trikampiai yra lygūs, jei vieno trikampio dvi kraštinės ir pusiaukraštinė, išeinančios iš vienos viršūnės, yra lygios atitinkamiems kito trikampio elementams.
39. Įrodykite, kad trikampiai yra lygūs, jei vieno trikampio kraštinė ir pusiaukraštinė, išvesta į tą kraštinę, bei kampai, kuriuos pusiaukraštinė sudaro su šia kraštine, yra lygūs atitinkamiems kito trikampio elementams.
40. Įrodykite, kad trikampiai yra lygūs, jei vieno trikampio pusiaukraštinė ir kampai, į kuriuos ji dalija trikampio kampą, yra lygūs atitinkamiems kito trikampio elementams.

§ 4. TRIKAMPIO KAMPŲ SUMA

TIESIŲ LYGIAGRETUMO POŽYMIAI

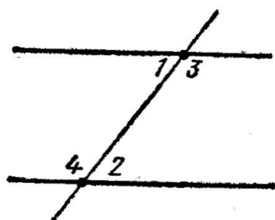
4.1 teorema. ***Jei dvi tiesės lygiagrečios trečiai tiesei, tai jos lygiagrečios viena kitai.***

Įrodymas. Sakykime, tiesės a ir b lygiagrečios tiesei c. Jei tiesė a nebūtų lygiagreti tiesei b, tai jos susikirstų kuriame nors taške C. Tada per tašką C eitų dvi tiesės, lygiagrečios tiesei c. Tačiau to negali būti, nes per tašką, nepriklausantį tiesei, galima nubrėžti ne daugiau kaip vieną tiesę, lygiagrečią duotai tiesei. Teorema įrodyta.



49 pav.

Nubrėžkime dvi tieses AB ir CD ir perkirskime jas trečiąja tiese AC (49 pav.). Tiesę AC vadinsime tiesių AB ir CD *kirstine*. Kampai, kurie susidaro, tieses AB ir CD perkirtus tiese AC, turi specialius pavadinimus. Jei taškai B ir D yra vienoje pusplokštumėje kirstinės AC atžvilgiu, tai kampai BAC ir DCA vadinami *vidaus vienašaliais kampais* (49 pav., a). Jei taš-



50 pav.

kai B ir D yra skirtingose pusplokštumėse kirstinės AC atžvilgiu, tai kampai BAC ir DCA vadinami *vidaus priešiniais kampais* (49 pav., *b*).

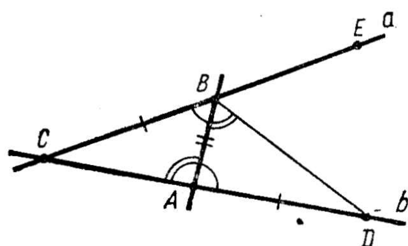
Kirstinė AC su tiesėmis AB ir CD sudaro dvi poras vidaus vienašalių ir dvi poras vidaus priešinių kampų. Iš gretutinių kampų savybės išplaukia teiginys: ***jei vienos poros vidaus priešiniai kampai yra lygūs, tai kitos poros vidaus priešiniai kampai irgi lygūs, o kiekvienos poros vidaus vienašalių kampų suma lygi*** 180°. Atvirkščiai, ***jei vienos poros vidaus vienašalių kampų suma lygi*** 180°, ***tai kitos poros vidaus vienašalių kampų suma irgi lygi*** 180°, ***o kiekvienos poros vidaus priešiniai kampai yra lygūs.*** Pagrįskime pirmąjį teiginį.

Pažiūrėkite į 50 paveikslą. Jei vidaus priešiniai kampai *1* ir *2* lygūs, tai vidaus priešiniai kampai *3* ir *4* irgi lygūs, nes jie yra kampų *1* ir *2* gretutiniai kampai. Kampai *1* ir *4* yra vidaus vienašaliai kampai. Kadangi kampas *4* papildo kampą *2* iki 180°, o kampas *2* lygus kampui *1*, tai kampų *1* ir *4* suma lygi 180°.

4.2 teorema. ***Jei vidaus priešiniai kampai lygūs arba vidaus vienašalių kampų suma lygi*** 180°, ***tai tiesės yra lygiagrečios.***

Įrodymas. Tarkime, kad tiesės a ir b nėra lygiagrečios. Tuomet jos susikerta kuriame nors taške C (51 pav.). Atkarpos CA tęsinyje nubrėžkime atkarpą AD, lygią atkarpai BC, o atkarpos CB tęsinyje pažymėkime bet kurį tašką E. Trikampis BAC lygus trikampiui ABD pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį: jie turi bendrą kraštinę AB; kampai CBA ir DAB lygūs (iš sąlygos žinome, kad jie yra vidaus priešiniai), o $AD=BC$, nes taip nubrėžėme.

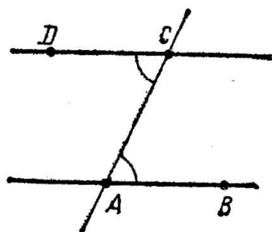
Kadangi trikampiai lygūs, tai atitinkami jų kampai ABD ir BAC lygūs. Kampas BAC savo ruožtu lygus priešiniam kampui ABE. Vadinasi, kampai ABD ir ABE lygūs. Kadangi jie atidėti į vieną pusplokštumę nuo pustiesės BA, tai tiesės BE ir BD sutampa. Tačiau to negali būti, nes taškas D nepriklauso tiesei BE. Todėl prielaida (tiesės



51 pav.

a ir *b* nėra lygiagrečios) buvo klaidinga. Teorema įrodyta.

4.1 ir 4.2 teoremos išreiškia *tiesių lygiagretumo požymius.*



52 pav.

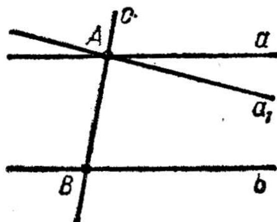
U ž d a v i n y s (3). Nubrėžta tiesė *AB* ir pažymėtas šiai tiesei nepriklausantis taškas *C*. Įrodykite, kad per tašką *C* galima nubrėžti tiesę, lygiagrečią tiesei *AB*.

S p r e n d i m a s. Tiesė *AC* dalija plokštumą į dvi pusplokštumes (52 pav.). Taškas *B* yra vienoje iš tų pusplokštumių. Prie pustiesės *CA* kitoje pusplokštumėje nubrėžkime kampą *ACD*, lygų kampui *CAB*. Tuomet tiesės *AB* ir *CD* bus lygiagrečios. Iš tikrųjų, kampai *BAC* ir *DCA* šių tiesių ir kirstinės *AC* atžvilgiu yra vidaus priešiniai kampai. Kadangi jie lygūs, tai iš 4.2 teoremos aišku, kad tiesės *AB* ir *CD* lygiagrečios.

Atsižvelgdami į 3 uždavinio teiginį ir V aksiomą (pagrindinę lygiagrečių tiesių savybę), gauname svarbią išvadą: ***per tašką, nepriklausantį duotai tiesei, galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę, lygiagrečią duotajai.***

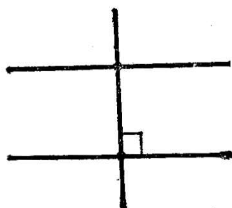
4.3 t e o r e m a (atvirkštinė 4.2 teoremai). ***Jei dvi lygiagrečias tieses kerta trečia tiesė, tai vidaus priešiniai kampai yra lygūs, o vidaus vienašalių kampų suma lygi*** **180°.**

Į r o d y m a s. Tarkime, kad tiesė *a* lygiagreti tiesei *b*, o tiesė *c* jas kerta. Per tiesių *a* ir *c* susikirtimo tašką *A* nubrėžkime tokią tiesę a_1, kad suma vidaus vienašalių kampų, kuriuos sudaro kirstinė *c* su tiesėmis a_1 ir *b*, būtų lygi 180° (53 pav.). Pagal 4.2 teoremą tiesė a_1 lygiagreti tiesei *b*. Kadangi per tašką *A* eina tik viena tiesė, lygiagreti tiesei *b*, tai tiesė *a* sutampa su tiese a_1. Vadinasi suma vidaus vienašalių kampų, kuriuos kirstinė *c* sudaro su lygiagrečiomis tiesėmis *a* ir *b*, lygi 180°. Tokiu atveju priešiniai kampai yra lygūs. Teorema įrodyta.

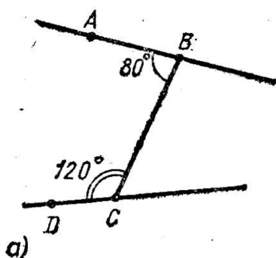


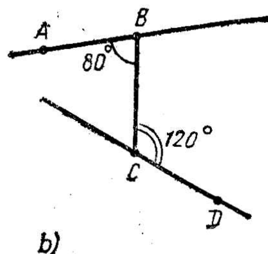
53 pav.

Iš 4.2 ir 4.3 teoremų išplaukia, kad *dvi tiesės, statmenos trečiai tiesei, yra lygiagrečios.* Be to, *jei tiesė statmena vienai iš lygiagrečių tiesių, tai ji statmena ir kitai* (54 pav.).



54 pav.





55 pav.

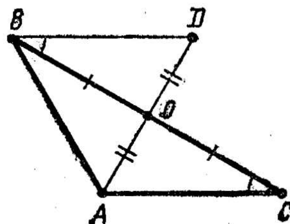
Uždavinys (7). Kampai ABC ir BCD atitinkamai lygūs 80° ir 120°. Ar tiesė AB gali būti lygiagreti tiesei CD? Pagrįskite atsakymą.

Sprendimas. Kirstinė BC su tiesėmis AB ir CD sudaro kampus ABC ir BCD. Jie yra arba vidaus vienašaliai (55 pav., *a*), arba vidaus priešiniai kampai (55 pav., *b*). Jei tiesės AB ir CD būtų lygiagrečios, tai būtų arba $\angle ABC = \angle BCD$ (kai kampai priešiniai), arba $\angle ABC + \angle BCD = 180°$ (kai jie vienašaliai). Tačiau $80° \neq 120°$ ir $80° + 120° = 200° \neq 180°$. Vadinasi, tiesės AB ir CD nėra lygiagrečios.

TRIKAMPIO KAMPŲ SUMA

4.4 teorema. ***Trikampio kampų suma lygi* 180°.**

Įrodymas. Sakykime, ABC — bet koks trikampis (56 pav.). Pažymėkime kraštinės BC vidurį O. Atkarpos AO tęsinyje nubrėžkime atkarpą OD, lygią atkarpai OA. Trikampis BOD lygus trikampiui COA: jų kampai prie viršūnės O lygūs kaip kryžminiai, $OB = OC$ ir $OA = OD$, nes taip nubrėžėme. Kadangi trikampiai lygūs, tai kampas DBO lygus kampui ACO.



56 pav.

Kampai DBO ir ACO yra vidaus priešiniai kampai, gauti, perkirtus tieses AC ir BD tiese BC. Iš tikrųjų, taškai A ir D yra skirtingose pusplokštumėse tiesės BC atžvilgiu, nes atkarpa AD kerta tiesę BC (taške O). Kadangi vidaus priešiniai kampai DBO ir

ACO lygūs, tai, remdamiesi 4.2 teorema, teigiame kad tiesė AC lygiagreti tiesei BD.

Kampai DBA ir CAB yra vidaus vienašaliai kampai, gauti, perkirtus tieses AC ir BD tiese AB. Iš tikrųjų, taškai C ir D yra vienoje pusplokštumėje tiesės AB atžvilgiu, būtent, toje pusplokštumėje, kurioje yra taškas O. Kadangi tiesė AC lygiagreti tiesei BD, tai vidaus vienašalių kampų CAB ir DBA suma lygi 180°. Kampas DBA lygus kampų DBC ir ABC sumai, nes spindulys BC kerta atkarpą AD, kurios galai priklauso kampo ABD kraštinėms. Kaip įrodėme, kampas DBC lygus kampui ACB. Todėl trikampio ABC kampų suma, t. y. $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$, lygi vidaus vienašalių kampų prie lygiagrečių tiesių AC ir BD bei kirstinės AB sumai, t. y. lygi 180°. Teorema įrodyta.

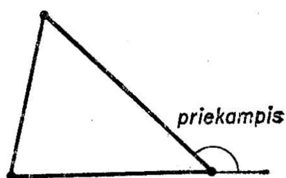
Iš 4.4 teoremos išplaukia tokia išvada: ***kiekvienas trikampis turi bent du smailius kampus.***

Įrodymas. Tarkime, kad trikampis turi tik vieną smailų kampą arba visai neturi smailių kampų. Toks trikampis turi du kampus, ne mažesnius už 90°. Tų dviejų kampų suma jau ne mažesnė už 180°, o to negali būti, nes visų trikampio kampų suma lygi 180°.

Uždavinys (12). Apskaičiuokite lygiakraščio trikampio kampus.

Sprendimas. Lygiakraščio trikampio kampai, kaip žinome, lygūs (§ 3, 13 uždavinys). Kadangi jų suma lygi 180°, tai kiekvienas kampas lygus 60°.

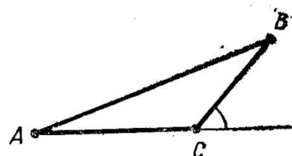
Trikampio *priekampiu* prie trikampio viršūnės vadiname kampą, gretutinį trikampio kampui prie tos viršūnės (57 pav.). Kad nepainiotume trikampio kampo su priekampiu prie tos pačios viršūnės, pirmąjį kartais vadiname *vidaus kampu.*



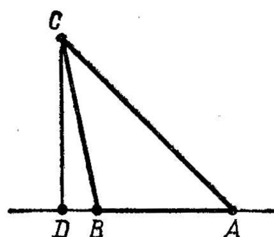
57 pav.

4.5 teorema. ***Trikampio priekampis lygus jam negretutinių vidaus kampų sumai.***

Įrodymas. Remiantis 4.4 teorema, trikampio ABC (58 pav.) kampų suma lygi 180°: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Iš čia gauname lygybę $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Dešinėje tos lygybės pusėje parašytas



58 pav.



59 pav.

priekampio prie viršūnės C laipsninis matas. Teorema įrodyta.

Iš paskutinės teoremos galima padaryti išvadą: ***trikampio priekampis yra didesnis už bet kurį jam negretutinį vidaus kampą.***

Uždavinys (28). Nubrėžta trikampio ABC aukštinė CD. Kuris iš taškų A, B ir D yra tarp kitų dviejų, kai trikampio kampai A ir B yra smailūs?

Sprendimas. Taškas B negali būti tarp A ir D. Jeigu jis būtų tarp A ir D (59 pav.), tai smailus kampas ABC, kaip trikampio CBD priekampis, būtų didesnis už statų kampą CDB. Panašiai įrodoma, kad taškas A irgi negali būti tarp taškų B ir D. Vadinasi, taškas D yra tarp taškų A ir B.

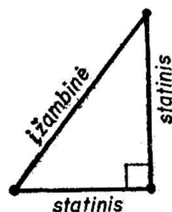
STATUSIS TRIKAMPIS

Stačiuoju trikampiu vadinamas trikampis, turintis statų kampą. Kadangi trikampio kampų suma lygi 180°, tai statusis trikampis turi tik vieną statų kampą. Kiti du stačiojo trikampio kampai yra smailūs. Smailieji kampai papildo vienas kitą iki 90°. Stačiojo trikampio kraštinė, esanti prieš statųjį kampą, vadinama *įžambine*, o kitos dvi kraštinės — *statiniais* (60 pav.).

Esame išnagrinėję tris trikampių lygumo požymius. Dar yra specialūs stačiųjų trikampių lygumo požymiai. Štai jie:

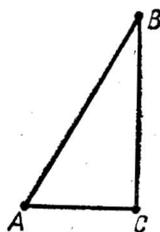
1. ***Jei vieno trikampio įžambinė ir smailusis kampas yra atitinkamai lygūs kito trikampio įžambinei ir smailiajam kampui, tai tie trikampiai lygūs.*** (Lygumo požymis pagal įžambinę ir smailųjį kampą.)

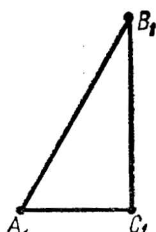
2. ***Jei vieno trikampio statinis ir prieš jį esantis kampas yra atitinkamai lygūs kito trikampio statiniui ir prieš jį esančiam kampui, tai tie trikampiai lygūs.*** (Lygumo požymis pagal statinį ir prieš jį esantį kampą.)



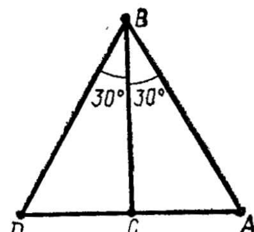
60 pav.

3. ***Jei vieno trikampio įžambinė ir statinis yra atitinkamai lygūs kito trikampio įžambinei ir statiniui, tai tie trikampiai lygūs.*** (Lygumo požymis pagal įžambinę ir statinį.)





61 pav.



62 pav.

Įrodymas. Tarkime, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, kurių kampai C ir C_1 statūs (61 pav.), atitinka vieną iš trijų sąlygų:

1) $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$; 2) $BC=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$;
3) $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$.

Įrodysime, kad šitie trikampiai yra lygūs.

Norint įrodyti du pirmuosius teiginius, užtenka pastebėti, kad iš lygybės $\angle A=\angle A_1$ išplaukia lygybė $\angle B=\angle B_1$. Tuomet remdamiesi antruoju trikampių lygumo požymiu, teigiame, kad trikampiai lygūs.

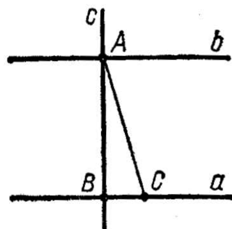
Kad statieji trikampiai lygūs trečiuoju atveju, įsitikinome, spręsdami 3 paragrafo 28 uždavinį.

Uždavinys (35). Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės.

Sprendimas. Sakykime, trikampio ABC kampas C status, o smailusis kampas B lygus 30° (62 pav.). Kraštinės AC tęsinyje nubrėžkime atkarpą CD, lygią AC. Trikampiai ABC ir DBC lygūs pagal pirmąjį požymį: jų kampai prie viršūnės C yra statūs, kraštinė BC bendra, o $AC=CD$, nes taip brėžėme. Iš tų trikampių lygumo aišku, kad $\angle D=\angle A=60°$, $\angle CBD=\angle CBA=30°$. Vadinasi, $\angle ABD=60°$. Iš to išplaukia, kad trikampis ABD yra lygiakraštis. Todėl $AC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB$, o tai ir reikėjo įrodyti.

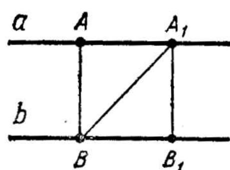
STATMENS TIESEI EGZISTAVIMAS IR VIENATIS

4.6 teorema. ***Iš bet kurio taško, nepriklausančio duotai tiesei, galima nuleisti vieną ir tik vieną statmenį į tą tiesę.***



63 pav.

Įrodymas. Sakykime, taškas A nepriklauso tiesei a (63 pav.). Per tašką A nu-



64 pav.

brėžkime tiesę b, lygiagrečią tiesei a (§ 4, 3 uždavinys). Paskui per tašką A nubrėžkime tiesę c, statmeną tiesei b. Ji bus statmena tiesei a (4.3 teorema) ir kirs ją kuriame nors taške B. Atkarpa AB — tai statmuo, nuleistas iš taško A į tiesę a.

Tarkime, kad iš taško A į tiesę a galima nuleisti du statmenis: AB ir AC. Tuomet trikampis ABC turėtų du stačius kampus, o to negali būti. Teorema įrodyta.

Statmens, nuleisto iš taško į tiesę, ilgis vadinamas *atstumu nuo taško iki tiesės.*

Uždavinys (42). Įrodykite, kad dviejų bet kurių tiesės taškų atstumai iki jai lygiagrečios tiesės yra lygūs.

Sprendimas. Sakykime, tiesė a lygiagreti tiesei b (64 pav.). Iš tiesės a taškų A ir A_1 nuleiskime statmenis AB ir A_1B_1 į tiesę b. Statieji trikampiai ABA_1 ir B_1A_1B lygūs, nes jų įžambinė BA_1 bendra, o smailieji kampai AA_1B ir B_1BA_1 lygūs kaip vidaus priešiniai kampai, esantys prie lygiagrečių tiesių a ir b bei kirstinės BA_1. Iš tikrųjų, tie kampai yra arba vidaus priešiniai, arba vidaus vienašaliai kampai. Jie negali būti vidaus vienašaliai kampai, nes jie smailūs, todėl jų suma nelygi 180°. Kadangi trikampiai lygūs, tai atitinkamos jų kraštinės (AB ir A_1B_1) lygios, t. y. atstumai nuo tiesės a taškų A ir A_1 iki tiesės b lygūs.

Kaip matome, visų tiesės taškų atstumai iki lygiagrečios jai tiesės yra vienodi. Todėl sakoma, kad lygiagrečios tiesės yra vienodai nutolusios viena nuo kitos. *Atstumu tarp lygiagrečių tiesių* vadinamas bet kurio vienos tiesės taško atstumas iki kitos tiesės.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Įrodykite, kad dvi tiesės, lygiagrečios trečiai tiesei, yra lygiagrečios viena kitai.
2. Paaiškinkite, kokie kampai vadinami vidaus vienašaliais. Kokie kampai vadinami vidaus priešiniais?
3. Įrodykite teiginį: jei vienos poros vidaus priešiniai kampai lygūs, tai kitos poros vidaus priešiniai kampai irgi lygūs, o kiekvienos poros vidaus vienašalių kampų suma lygi 180°.

Atvirkščiai, jei vienos poros vidaus vienašalių kampų suma lygi 180°, tai kitos poros vidaus vienašalių kampų suma taip pat lygi 180°, o kiekvienos poros vidaus priešiniai kampai lygūs.

4. Suformuluokite ir įrodykite tiesių lygiagretumo požymį, pagrįstą kampais, kuriuos tos tiesės sudaro su kirstine.
5. Įrodykite, kad per tašką, nepriklausantį tiesei, galima nubrėžti jai lygiagrečią tiesę. Kiek tiesių, lygiagrečių duotai tiesei, galima nubrėžti per tašką, nepriklausantį tai tiesei?
6. Įrodykite teiginį: jei dvi lygiagrečias tieses kerta trečia tiesė, tai vidaus priešiniai kampai yra lygūs, o vidaus vienašalių kampų suma lygi 180°.
7. Įrodykite, kad dvi tiesės, statmenos trečiai tiesei, yra lygiagrečios. Jei tiesė statmena vienai iš lygiagrečių tiesių, tai ji statmena ir kitai.
8. Prisiminkite trikampio kampų sumos teoremos įrodymą (4.4 teorema; žr. 56 pav.):
   a) paaiškinkite, kodėl tiesių AC ir BD bei kirstinės BC sudaryti kampai CBD ir BCA yra vidaus priešiniai;
   b) paaiškinkite, kodėl tiesių AC ir BD bei kirstinės AB sudaryti kampai ABD ir BAC yra vidaus vienašaliai;
   c) paaiškinkite, kodėl kampas ABD lygus kampų ABC ir DBC sumai.
9. Įrodykite, kad kiekvienas trikampis turi bent du smailius kampus.
10. Ką vadiname trikampio priekampiu?
11. Įrodykite, kad trikampio priekampis yra lygus jam negretutinių vidaus kampų sumai.
12. Įrodykite, kad trikampio priekampis didesnis už bet kurį jam negretutinį vidaus kampą.
13. Kokį trikampį vadiname stačiuoju?
14. Kam lygi stačiojo trikampio smailiųjų kampų suma?
15. Kuri stačiojo trikampio kraštinė vadinama įžambine? Kurios kraštinės vadinamos statiniais?
16. Suformuluokite ir įrodykite teoremas, nusakančias stačiųjų trikampių lygumo požymius.
17. Įrodykite, kad iš bet kurio taško, nepriklausančio duotai tiesei, galima nuleisti statmenį į tą tiesę ir kad toks statmuo yra vienintelis.
18. Ką vadiname atstumu nuo taško iki tiesės?
19. Paaiškinkite, ką vadiname atstumu tarp lygiagrečių tiesių.

PRATIMAI

1. Įrodykite teiginį: jei tiesė kerta vieną iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji kerta ir kitą.
2. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas B_1, o kraštinėje AC — taškas C_1. Išvardykite tiesių AB ir AC bei kirsti-

nės B_1C_1 sudaromus vidaus vienašalius ir vidaus priešinius kampus.

3. Nubrėžta tiesė *AB* ir pažymėtas šiai tiesei nepriklausantis taškas *C*. Įrodykite, kad per tašką *C* galima nubrėžti tiesę, lygiagrečią tiesei *AB*.
4. Įrodykite, kad lygiagrečių tiesių ir kirstinės sudaromų vidaus priešinių kampų pusiaukampinės yra lygiagrečiose tiesėse.
5. Atkarpos *AB* ir *CD* susikerta taške *E*, kuris dalija šias atkarpas pusiau. Įrodykite, kad tiesė *AC* lygiagreti tiesei *BD*.
6. Trikampis *ABC* lygus trikampiui *BAD*. Taškai *C* ir *D* yra skirtingose tiesės *AB* pusėse. Įrodykite, kad tiesė *AC* lygiagreti tiesei *BD*.
7. Kampai *ABC* ir *BCD* atitinkamai lygūs 80° ir 120°. Ar tiesė *AB* gali būti lygiagreti tiesei *CD*? Pagrįskite atsakymą.
8. Dvi lygiagrečios tiesės perkirstos trečia tiese. Dviejų vidaus vienašalių kampų skirtumas lygus 30°. Apskaičiuokite tuos kampus.
9. Dvi lygiagrečios tiesės perkirstos trečia tiese. Dviejų vidaus priešinių kampų suma lygi 150°. Apskaičiuokite tuos kampus.
10. Dvi lygiagrečios tiesės perkirstos trečia tiese. Vienas gautas kampas lygus 72°. Apskaičiuokite kitus septynis kampus.
11. Vienas iš kampų, gautų, dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja, lygus 30°. Ar kuris nors iš kitų septynių kampų gali būti lygus 70°? Pagrįskite atsakymą.
12. Apskaičiuokite lygiakraščio trikampio kampus.
13. Kokį kampą sudaro vidaus vienašalių kampų pusiaukampinės, kai lygiagrečias tieses kerta trečia tiesė?
14. Raskite nežinomą trikampio kampą, kai du jo kampai lygūs: 1) 50° ir 30°; 2) 40° ir 75°; 3) 65° ir 80°; 4) 25° ir 120°.
15. Raskite trikampio kampus, kai jie proporcingi skaičiams: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.
16. Ar gali trikampis turėti: 1) du bukus kampus; 2) buką ir statų kampą; 3) du stačius kampus?
17. Ar gali būti bukas lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo?
18. Raskite lygiašonio trikampio kampą tarp šoninių kraštinių, kai kampas prie pagrindo lygus: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.
19. Raskite lygiašonio trikampio kampą prie pagrindo, kai kampas tarp šoninių kraštinių lygus: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.
20. Vienas lygiašonio trikampio kampas lygus 100°. Raskite kitus jo kampus.
21. Vienas lygiašonio trikampio kampas lygus 70°. Raskite kitus jo kampus. Kiek sprendinių turi šis uždavinys?
22. Lygiašonio trikampio *ABC* pagrindas yra kraštinė *AC*. Nubrėžta pusiaukampinė *CD*. Raskite trikampio kampus, kai kampas *ADC* lygus: 1) 60°; 2) 75°; 3) α.

23. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas yra kraštinė AC, o kampas prie viršūnės B lygus 36°. Nubrėžta pusiaukampinė AD. Įrodykite, kad trikampiai CDA ir ADB yra lygiašoniai.

24. Iš trikampio ABC viršūnių A ir B nubrėžtos pusiaukampinės. Jų susikirtimo taškas pažymėtas raide D. Raskite kampą ADB, kai: 1) $A=50°$, $\angle B=100°$; 2) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$; 3) $\angle C=130°$; 4) $\angle C=\gamma$.

25. Vienas lygiašonio trikampio priekampis lygus 70°. Raskite trikampio kampus.

26. Raskite trikampio kampus, kai jo priekampiai prie dviejų viršūnių lygūs 120° ir 150°.

27. Du trikampio priekampiai lygūs 100° ir 150°. Raskite trečią priekampį.

28. Nubrėžta trikampio ABC aukštinė CD. Kuris iš taškų A, B ir D yra tarp kitų dviejų, kai trikampio kampai A ir B yra smailūs?

29. Iš trikampio ABC stataus kampo viršūnės nubrėžta aukštinė BD. Raskite kampą CBD, kai: 1) $\angle A=20°$; 2) $\angle A=65°$; 3) $\angle A=\alpha$.

30. Iš trikampio ABC buko kampo viršūnės nubrėžta aukštinė BD. Raskite trikampių ABD ir CBD kampus, kai $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

31. Įrodykite, kad lygiašonio trikampio priekampio prie viršūnės pusiaukampinė lygiagreti pagrindui.

32. Prie trikampio ABC viršūnių A ir B nubrėžta po vieną priekampį. Tų priekampių suma lygi 240°. Apskaičiuokite trikampio kampą C.

33. Trikampio ABC kraštinės AC tęsiniuose nubrėžtos atkarpos $AD=AB$ ir $CE=CB$. Kaip rasti trikampio DBE kampus, kai žinomi trikampio ABC kampai?

34. Vienas trikampio vidaus kampas lygus 30°, o vienas priekampis lygus 40°. Raskite kitus to trikampio vidaus kampus.

35. Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės.

36. Apskaičiuokite stataus lygiašonio trikampio kampus.

37. Nubrėžta lygiakraščio trikampio ABC pusiaukraštinė AD. Raskite trikampio ABD kampus.

38. Trikampio ABC aukštinės, nubrėžtos iš viršūnių A ir C, susikerta taške M. Raskite $\angle AMC$, kai $\angle A=70°$, $\angle C=80°$.

39. Trikampio ABC pusiaukraštinė BD lygi pusei kraštinės AC. Raskite trikampio kampą B.

40. Tiesė a kerta atkarpą BC jos vidurio taške. Įrodykite, kad taškai B ir C vienodai nutolę nuo tiesės a.

41. Atkarpa BC kerta tiesę a taške O. Taškai B ir C yra vienodai nutolę nuo tiesės a. Įrodykite, kad taškas O yra atkarpos BC vidurys.

42. Įrodykite, kad dviejų bet kurių tiesės taškų atstumai iki jai lygiagrečios tiesės yra lygūs.

§ 5. BRĖŽIMO UŽDAVINIAI

APSKRITIMAS

A p i b r ė ž i m a s. *Apskritimu* vadiname figūrą, kurią sudaro visi plokštumos taškai, vienodai nutolę nuo vieno taško. Tas taškas vadinamas *apskritimo centru.*

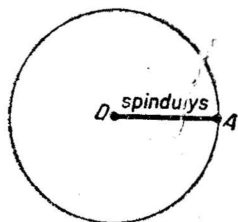
Atstumas nuo apskritimo taško iki jo centro vadinamas *apskritimo spinduliu.* Spinduliu vadinama ir atkarpa, jungianti apskritimo tašką su jo centru (65 pav.).

Atkarpa, jungianti du apskritimo taškus, vadinama *styga.* Styga, einanti per centrą, vadinama *skersmeniu.* 66 paveiksle pavaizduota styga BC ir skersmuo AD.

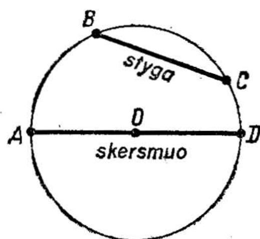
Apibrėžtu apie trikampį apskritimu *(apibrėžtiniu apskritimu)* vadinamas apskritimas, kuris eina per visas trikampio viršūnes.

Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra taškas, kuriame susikerta tiesės, statmenos trikampio kraštinėms ir einančios per kraštinių vidurį.

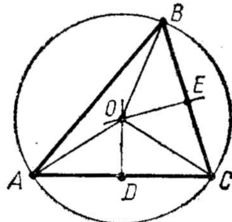
Į r o d y m a s. Tarkime, kad taškas O yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras (67 pav.). Tuomet trikampis AOC yra lygiašonis, nes jo kraštinės OA ir OC lygios (apskritimo spinduliai). To trikampio pusiaukraštinė OD sutampa su aukštine. Todėl apskritimo centras yra tiesėje, statmenoje kraštinei AC ir einančioje per tos kraštinės vidurį. Panašiai įsitikiname, kad apskritimo centras yra tiesėse, statmenose dviem kitoms trikampio kraštinėms.



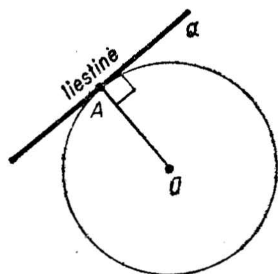
65 pav.



66 pav.



67 pav.



68 pav.

P a s t a b a. Tiesė, einanti per atkarpos vidurį ir statmena jai, dažnai vadinama *vidurio statmeniu.* Todėl kartais sakome, kad apibrėžto apie trikampį apskritimo centras sutampa su trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo tašku.

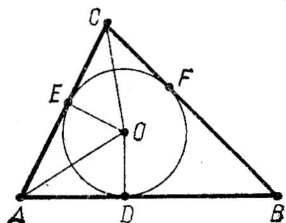
Tiesė, einanti per apskritimo tašką ir statmena spinduliui, išvestam į tą tašką, vadinama *liestine.* Tokiu atveju tas apskritimo taškas vadinamas *lietimosi tašku.* 68 paveiksle tiesė *a*, nubrėžta per apskritimo tašką *A*, yra statmena spinduliui *OA*. Tiesė *a* yra apskritimo liestinė, o taškas *A* — lietimosi taškas. Galima sakyti, kad apskritimas liečia tiesę *a* taške *A*.

Įbrėžtu į trikampį apskritimu (*įbrėžtiniu apkritimu*) vadinamas apskritimas, kuris liečia visas trikampio kraštines.

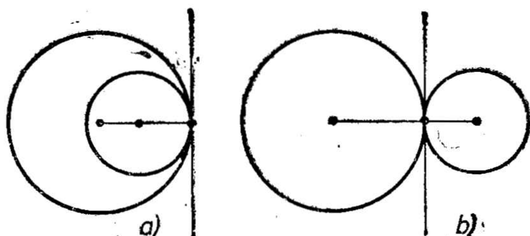
Į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra to trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.

Į r o d y m a s. Tarkime, kad taškas *O* yra į trikampį *ABC* įbrėžto apskritimo centras, *D*, *E* ir *F* — taškai, kuriuose apskritimas liečia kraštines (69 pav.). Statieji trikampiai *AOD* ir *AOE* lygūs, nes jie turi bendrą įžambinę *AO* ir lygius statinius — apskritimo spindulius — *OD* ir *OE*. Kadangi trikampiai lygūs, tai atitinkami jų kampai (*OAD* ir *OAE*) lygūs. Tai reiškia, kad taškas *O* priklauso trikampio pusiaukampinei, išvestai iš viršūnės *A*. Panašiai įsitikiname, kad taškas *O* priklauso dviem kitoms to trikampio pusiaukampinėms.

Sakoma, kad du apskritimai, turintys bendrą tašką, *liečiasi* tame taške, kai jie tame taške liečia bendrą liestinę (70 pav.). Apskritimų lietimasis vadinamas *vidiniu*, kai jų centrai yra vie-



69 pav.



70 pav.

noje bendrosios liestinės pusėje (70 pav., *a*). Apskritimų lietimasis vadinamas *išoriniu*, kai jų centrai yra skirtingose bendrosios liestinės pusėse (70 pav., *b*).

KĄ VADINAME BRĖŽIMO UŽDAVINIU

Brėžimo uždavinyje reikalaujama nubraižyti kurią nors geometrinę figūrą nurodytais braižymo įrankiais. Dažniausiai tie įrankiai yra liniuotė ir skriestuvas. Sprendžiant uždavinį, nebūtina braižyti reikalaujamą figūrą, bet privalu išaiškinti, kaip reikia braižyti, ir pateikti atitinkamą įrodymą. Uždavinys laikomas išspręstu, kai nustatoma figūros braižymo eiga ir įrodoma, kad, atlikę nurodytuosius veiksmus, iš tikrųjų gausime figūrą, turinčią reikalaujamas savybes.

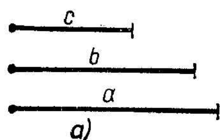
Liniuote, kaip geometrinio braižymo įrankiu, galima nubrėžti tiesę; tiesę, einančią per duotą tašką; tiesę, einančią per du duotus taškus. Kitų veiksmų liniuote daryti neleidžiama. Pavyzdžiui, liniuote negalima matuoti atkarpų, net kai ji turi padalas.

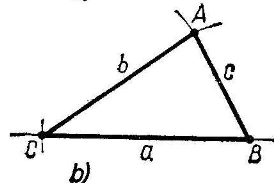
Skriestuvu, kaip geometrinio braižymo įrankiu, galima nubrėžti apskritimą, kai nurodytas jo centras ir spindulys. Atskiru atveju duotoje tiesėje nuo duoto taško galima atidėti atkarpą, lygią duotajai atkarpai.

Nagrinėsime paprasčiausius brėžimo uždavinius.

TRIKAMPIO BRAIŽYMAS, KAI DUOTOS TRYS KRAŠTINĖS

5.1 uždavinys. ***Nubraižykite trikampį, kai duotos jo kraštinės a, b ir c*** (71 pav., *a*).



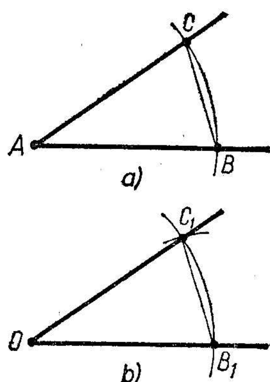


71 pav.

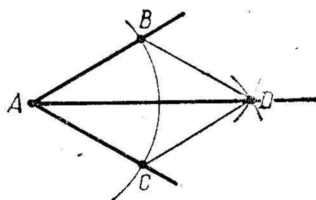
Sprendimas. Liniuote nubrėžiame tiesę ir joje pažymime tašką *B* (71 pav., *b*). Iš centro *B* skriestuvu nubrėžiame spindulio *a* apskritimą. Pažymime to apskritimo ir tiesės susikirtimo tašką *C*. Paskui iš centro *B* nubrėžiame spindulio *c* apskritimą, o iš centro *C* — spindulio *b* apskritimą. Pažymime šių apskritimų susikirtimo tašką *A*. Nubrėžiame atkarpas *AB* ir *AC*. Trikampio *ABC* kraštinės lygios atkarpoms *a*, *b* ir *c*.

5.2 u ž d a v i n y s. ***Prie pustiesės nurodytoje pusplokštumėje nubraižykite kampą, lygų duotam kampui.***

S p r e n d i m a s. Nubrėžiame apskritimą, kurio centras sutampa su duoto kampo viršūne A (72 pav., a). Tarkime, kad B ir C yra to apskritimo ir kampo kraštinių susikirtimo taškai. Nubrėžiame apskritimą, kurio spindulys lygus AB, o centras sutampa su pustiesės pradžios tašku O (72 pav., b). Šio apskritimo ir pustiesės susikirtimo tašką pažymėkime B_1. Nubrėžiame apskritimą, kurio centras — taškas B_1, o spindulys lygus BC. Dviejų paskutinių apskritimų susikirtimo taškas C_1, esantis nurodytoje pusplokštumėje, priklauso braižomo kampo kraštinei. Norint tuo įsitikinti, užtenka pastebėti, kad trikampiai ABC ir OB_1C_1 lygūs: jie turi atitinkamai lygias kraštines. Kampai A ir O yra atitinkami tų trikampių kampai.



72 pav.



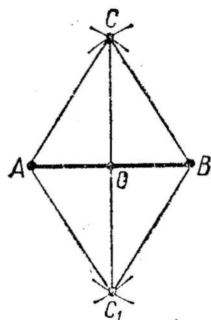
73 pav.

KAMPO PUSIAUKAMPINĖS BRĖŽIMAS

5.3 u ž d a v i n y s. ***Nubrėžkite kampo pusiaukampinę.***

S p r e n d i m a s. Iš kampo viršūnės A, kaip iš centro, nubrėžiame bet kokio spindulio apskritimą (73 pav.). To apskritimo ir kampo kraštinių susikirtimo taškus pažymėkime raidėmis B ir C. Iš taškų B ir C nubrėžiame to paties spindulio apskritimus. Sakykime, D yra jų susikirtimo taškas, nesutampantis su A. Nubrėžiame pustiesę AD. Ji dalija kampą BAC pusiau. Tai išplaukia iš trikampių ABD ir ACD lygumo: jų kampai DAB ir DAC yra atitinkami kampai.

ATKARPOS DALIJIMAS PUSIAU

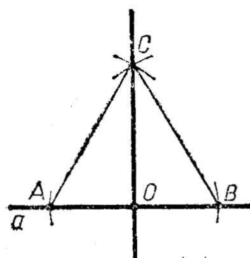


74 pav.

5.4 uždavinys. ***Padalykite atkarpą pusiau.***

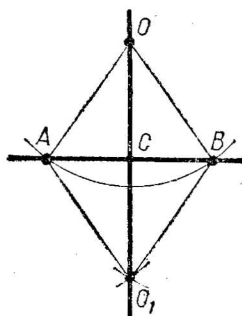
Sprendimas. Sakykime, dalijamoji atkarpa yra AB (74 pav.). Iš taškų A ir B nubrėžiame spindulio AB apskritimus. Jų susikirtimo taškai C ir C_1 yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AB atžvilgiu. Todėl atkarpa CC_1 kerta tiesę AB kuriame nors taške O. Tas taškas kaip tik yra atkarpos AB vidurys.

Iš tikrųjų, trikampis CAC_1 lygus trikampiui CBC_1 pagal trečiąjį trikampių lygumo požymį. Iš to aišku, kad kampas ACO lygus kampui BCO. Trikampis ACO lygus trikampiui BCO pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį. Tų trikampių kraštinės AO ir BO yra atitinkamos jų kraštinės, todėl jos lygios. Vadinasi, taškas O yra atkarpos AB vidurys.



75 pav.

STATMENOS TIESĖS BRĖŽIMAS



76 pav.

5.5 uždavinys. ***Per tašką O nubrėžkite tiesę, statmeną tiesei a.***

Sprendimas. Gali būti du atvejai:

1) taškas O priklauso tiesei a;

2) taškas O nepriklauso tiesei a.

Išnagrinėsime pirmąjį atvejį (75 pav.). Iš taško O nubrėžiame bet kokio spindulio apskritimą. Jis kerta tiesę a taškuose A ir B. Iš taškų A ir B nubrėžiame spindulio AB apskritimus. Sakykime, vienas susikirtimo taškas yra C. Ieškomoji tiesė eina per taškus O ir C.

Kad tiesė OC statmena tiesei AB, išplaukia iš trikampių ACO ir BCO kampų prie viršūnės O lygumo. Tie trikampiai lygūs pagal trečiąjį trikampių lygumo požymį.

Išnagrinėsime antrąjį atvejį (76 pav.).

Iš taško O nubrėžiame apskritimą, kertantį tiesę a. Jis kerta tiesę a taškuose A ir B. Iš taškų A ir B tuo pačiu spinduliu nubrėžiame du apskritimus. Sakykime, jų susikirtimo taškas O_1 yra kitoje pusplokštumėje negu taškas O. Ieškomoji tiesė eina per taškus O ir O_1. Įrodysime tai.

Tiesių AB ir OO_1 susikirtimo tašką žymėsime raide C. Trikampis AOB lygus trikampiui AO_1B pagal trečiąjį požymį. Todėl kampas OAC lygus kampui O_1AC. Tuomet trikampis OAC lygus trikampiui O_1AC pagal pirmąjį požymį. Vadinasi, jų kampai ACO ir ACO_1 lygūs. Kadangi tie kampai yra gretutiniai, tai jie statūs. Todėl OC yra statmuo, nuleistas iš taško O į tiesę a.

GEOMETRINĖ TAŠKŲ VIETA

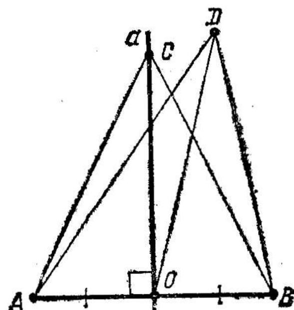
Vienas brėžimo uždavinių sprendimo metodų vadinamas geometrinių vietų metodu. *Geometrine taškų vieta* vadiname figūrą, sudarytą iš visų plokštumos taškų, turinčių tam tikrą savybę. Pavyzdžiui, apskritimą galima laikyti geometrine vieta taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško.

Svarbią geometrinę taškų vietą nusako čia pateikiama teorema.

5.6 teorema. ***Taškų, vienodai nutolusių nuo dviejų duotų taškų, geometrinė vieta yra tiesė, statmena tuos taškus jungiančiai atkarpai ir einanti per tos atkarpos vidurį.***

Įrodymas. Sakykime, A ir B — duotieji taškai, a — tiesė, einanti per atkarpos AB vidurį O ir statmena tiesei AB (77 pav.). Reikia įrodyti, kad: 1) kiekvienas tiesės a taškas yra vienodai nutolęs nuo taškų A ir B; 2) kiekvienas plokštumos taškas, vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, priklauso tiesei a.

Kad kiekvienas tiesės a taškas C yra vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, išplaukia iš trikampių AOC ir BOC lygumo. Tų trikampių kampai prie viršūnės O statūs, kraštinė OC bendra, $AO=OB$, nes taškas O yra atkarpos AB vidurys. Dabar įsitikinsime, kad kiekvienas plokštumos taškas D, vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, priklauso tiesei a.



77 pav.

Trikampis ADB lygiašonis, nes $AD=$ $=BD$. Atkarpa DO — to trikampio

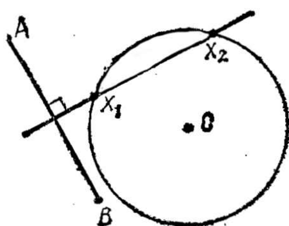
pusiaukraštinė. Remiantis lygiašonio trikampio savybe, pusiaukraštinė, nubrėžta į pagrindą, yra aukštinė. Iš 2.3 teoremos aišku, kad tiesė OD sutampa su a. Vadinasi, taškas D yra tiesėje a. Teorema įrodyta.

GEOMETRINIŲ VIETŲ METODAS

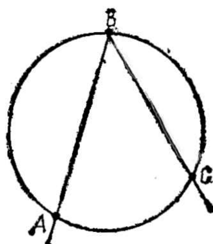
Sprendžiant brėžimo uždavinius, geometrinių vietų metodas taikomas šitaip. Sakykime, sprendžiant brėžimo uždavinį, reikia rasti tašką X, atitinkantį dvi sąlygas. Taškų, atitinkančių pirmąją sąlygą, geometrinė vieta yra kuri nors figūra F_1, o taškų, atitinkančių antrąją sąlygą, geometrinė vieta yra kita figūra F_2. Ieškomasis taškas X priklauso ir figūrai F_1, ir figūrai F_2, t. y. jis yra šių figūrų susikirtimo taškas. Jei figūros F_1 ir F_2 yra paprastos (pavyzdžiui, jas sudaro tiesės ir apskritimai), tai lengva jas nubraižyti ir rasti dominantį tašką X. Pateiksime pavyzdį.

Uždavinys (38). Duoti taškai A, B ir C. Raskite tašką X, kuris yra vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, o nuo taško C nutolęs duotu atstumu.

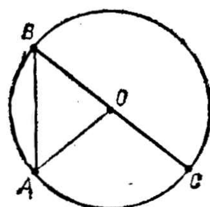
Sprendimas. Ieškomasis taškas X atitinka dvi sąlygas: 1) jis vienodai nutolęs nuo taškų A ir B; 2) jis nutolęs nurodytu atstumu nuo taško C. Taškų, atitinkančių pirmąją sąlygą, geometrinė vieta yra tiesė, statmena atkarpai AB ir einanti per tos atkarpos vidurį (78 pav.). Taškų, atitinkančių antrąją sąlygą, geometrinė vieta yra nurodytojo spindulio apskritimas, kurio centras — taškas C. Ieškomasis taškas X yra tiesės ir apskritimo susikirtimo taškas.



78 pav.



79 pav.



80 pav.

Kampas, kurio viršūnė priklauso apskritimui, o kraštinės kerta šį apskritimą, vadinamas *įbrėžtu* į apskritimą (*įbrėžtiniu kampu*). Kampas ABC, pavaizduotas 79 paveiksle, yra įbrėžtinis, nes jo viršūnė B priklauso apskritimui, o kraštinės eina per apskritimo taškus A ir C.

5.7 teorema. ***Įbrėžtinis kampas, kurio kraštinės eina per du duotus apskritimo taškus, arba lygus pusei kampo tarp apskritimo spindulių, išvestų į tuos taškus, arba tą pusę papildo iki 180°.***

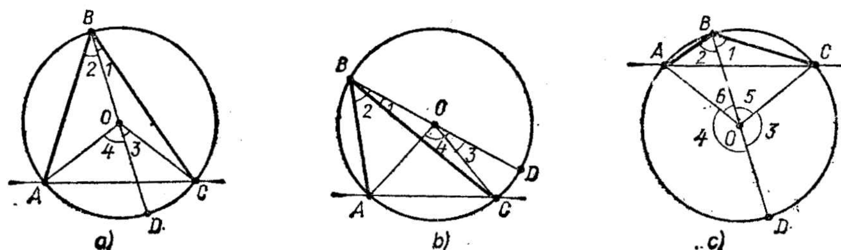
Įrodymas. Išnagrinėsime atskirą atvejį, kai viena įbrėžtinio kampo kraštinė eina per apskritimo centrą (80 pav.). Trikampis AOB yra lygiašonis, nes jo kraštinės OA ir OB yra apskritimo spinduliai. Todėl to trikampio kampai A ir B lygūs, o kadangi jų suma lygi trikampio priekampiui prie viršūnės O, tai kampas B lygus pusei kampo AOC.

Nagrinėdami bendrąjį atvejį, nubrėžiame skersmenį BD (81 pav.) ir remiamės ką tik įrodytu teiginiu.

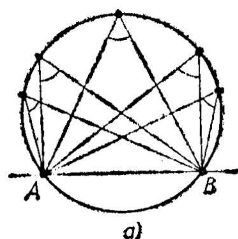
Išnagrinėsime 81, *a*, paveiksle pavaizduotą atvejį. Čia įbrėžtinis kampas ABC lygus *1* ir *2* kampų sumai, o spindulių OA ir OB sudaromas kampas lygus *3* ir *4* kampų sumai. Jau įrodėme, kad *1* kampas lygus pusei *3* kampo, o *2* kampas — pusei *4* kampo. Todėl įbrėžtinis kampas ABC lygus pusei kampo, kurį sudaro spinduliai OA ir OC.

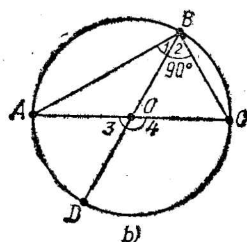
Atvejis, pavaizduotas 81, *b*, paveiksle, skiriasi nuo ankstesniojo tik tuo, kad kampas ABC lygus *2* ir *1* kampų skirtumui, o kampas AOC lygus *4* ir *3* kampų skirtumui. Todėl ir šiuo atveju kampas ABC lygus pusei kampo AOC.

Atveju, pavaizduotu 81, *c*, paveiksle, kampas ABC lygus *1* ir *2* kampų sumai, o kampas AOC lygus ne *3* ir *4* kampų sumai,



81 pav.





82 pav.

o *5* ir *6* kampų sumai. Kadangi kampas *ABC* lygus pusei *3* ir *4* kampų sumos, tai jis lygus

$$\frac{(180^\circ - \angle 5) + (180^\circ - \angle 6)}{2} = 180^\circ -$$

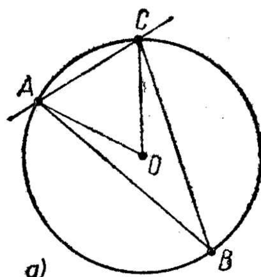
$$-\frac{\angle 5 + \angle 6}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC.$$

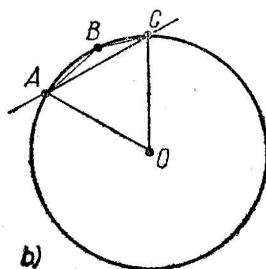
Teorema įrodyta.

P a s t a b o s. Pirmas ir antras 5.7 teoremos įrodymo atvejai skiriasi nuo trečiojo tuo, kad pirmais dviem atvejais įbrėžtinio kampo viršūnė *B* ir apskritimo centras *O* yra vienoje tiesės *AC* pusėje, o trečiuoju — skirtingose pusėse. Pagal šį požymį galima sužinoti, kada įbrėžtinis kampas lygus pusei spindulių sudaromo kampo ir kada ją papildo iki 180°.

Dar atkreipkime dėmesį, kad pusė spindulių sudaromo kampo ne didesnė už 90°, todėl jos papildinys iki 180° ne mažesnis už 90°. Iš to darome išvadą: *jei įbrėžtinis kampas yra smailus, tai jis lygus pusei spindulių sudaromo kampo, o jei bukas, tai tą pusę papildo iki* 180°.

I š v a d a. *Įbrėžtiniai kampai, kurių kraštinės eina per du duotus apskritimo taškus, o viršūnės yra vienoje pusėje nuo tiesės, jungiančios tuos taškus, lygūs.* Atskiras atvejis: *įbrėžtiniai kampai, kurių kraštinės eina per apskritimo skersmens galus, yra statūs* (82 pav.).





83 pav.

U ž d a v i n y s (48). Taškai *A*, *B* ir *C* priklauso apskritimui. Raskite kampą *ABC*, kai styga *AC* lygi apskritimo spinduliui. (Du atvejai.)

S p r e n d i m a s. Jei taškas *B* yra toje pačioje tiesės *AC* pusėje, kaip ir centras *O* (83 pav., *a*), tai pagal įbrėžtinio kampo savybę $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Kadangi sąly-

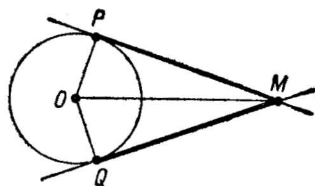
goje pasakyta, kad styga AC lygi apskritimo spinduliui, tai trikampis AOC yra lygiakraštis. Todėl šiuo atveju kampas AOC lygus 60°, o $\angle ABC = 30°$. Jei taškai B ir O yra skirtingose tiesės AC pusėse (83 pav., *b*), tai pagal įbrėžtinio kampo savybę $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2} \angle AOC = 150°$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Ką vadiname apskritimu, apskritimo centru, spinduliu?
2. Ką vadiname apkritimo styga? Kokia styga vadinama skersmeniu?
3. Kokį apskritimą vadiname apibrėžtu apie trikampį (apibrėžtiniu apskritimu)?
4. Įrodykite, kad apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas.
5. Kokia tiesė vadinama apskritimo liestine?
6. Kokį apskritimą vadiname įbrėžtu į trikampį (įbrėžtiniu apskritimu)?
7. Įrodykite, kad į trikampį įbrėžto apskritimo centras yra to trikampio pusiaukampinių susikirtimo taškas.
8. Kada sakome, jog du apskritimai liečiasi kuriame nors taške?
9. Koks apskritimų lietimasis vadinamas išoriniu ir koks — vidiniu?
10. Paaiškinkite, kaip braižomas trikampis, kai duotos trys kraštinės.
11. Paaiškinkite, kaip prie duotos pustiesės nurodytoje pusplokštumėje braižomas kampas, lygus duotam kampui.
12. Paaiškinkite, kaip kampą padalyti pusiau.
13. Paaiškinkite, kaip atkarpą padalyti pusiau.
14. Paaiškinkite, kaip per tašką nubrėžti tiesę, statmeną duotai tiesei.
15. Ką vadiname geometrine taškų vieta?
16. Kokią figūrą sudaro taškai, vienodai nutolę nuo dviejų duotų taškų?
17. Kaip taikomas geometrinių vietų metodas brėžimo uždaviniams spręsti? Pateikite pavyzdį.
18. Koks kampas vadinamas įbrėžtu į apskritimą (įbrėžtiniu kampu)?
19. Suformuluokite ir įrodykite įbrėžtinių kampų teoremą.
20. Kam lygus įbrėžtinis kampas ABC, kai: a) kampo viršūnė B ir apskritimo centras O yra vienoje pusplokštumėje tiesės AC atžvilgiu; b) kampo viršūnė B ir centras O yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AC atžvilgiu; c) styga AC yra apskritimo skersmuo?
21. Kam lygus įbrėžtinis kampas, kai jis yra smailus (bukas)?
22. Įrodykite, kad visi įbrėžtiniai kampai, kurių kraštinės eina per du duotus apskritimo taškus, o viršūnės yra vienoje tuos taškus jungiančios tiesės pusėje, yra lygūs.

PRATIMAI

1. Įrodykite, kad pustiesė, išeinanti iš apskritimo centro, kerta apskritimą viename taške.
2. Įrodykite, kad tiesė, einanti per apskritimo centrą, kerta apskritimą dviejuose taškuose.
3. Įrodykite, kad apskritimo skersmuo, einantis per stygos vidurį, yra jai statmenas.
4. Suformuluokite ir įrodykite teoremą, atvirkštinę 3 uždavinio teiginiui.
5. Iš apskritimo taško išvestas skersmuo ir styga, lygi spinduliui. Raskite jų sudaromą kampą.
6. Iš apskritimo taško išvestos dvi stygos, lygios spinduliui. Raskite jų sudaromą kampą.
7. Ar gali apskritimas liesti tiesę dviejuose taškuose? Pagrįskite atsakymą.
8. Įrodykite, kad apskritimas ir jo liestinė turi tik vieną bendrą tašką, būtent, lietimosi tašką.
9. Kokius kampus sudaro styga AB, lygi apskritimo spinduliui, su apskritimo liestine, nubrėžta per tašką A?
10. Apskritimo styga lygi spinduliui. Raskite kampus, kuriuos sudaro tiesės, liečiančios apskritimą tos stygos galuose.
11. Apskritimai, kurių spinduliai lygūs 30 cm ir 40 cm, liečiasi. Raskite atstumą tarp tų apskritimų centrų, kai jie liečiasi iš vidaus ir kai liečiasi iš išorės.
12. Ar liečiasi apskritimai, kurių spinduliai lygūs 25 cm ir 50 cm, kai atstumas tarp jų centrų lygus 60 cm?
13. 1) Taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei, o taškas O tai tiesei nepriklauso. Trikampių AOB ir BOC pagrindai yra AB ir BC. Ar gali tie trikampiai būti lygiašoniai? Pagrįskite atsakymą.
    2) Ar gali apskritimas ir tiesė turėti daugiau kaip du susikirtimo taškus?
14. 1) Apskritimai, kurių centrai yra O ir O_1, susikerta taškuose A ir B. Įrodykite, kad tiesė AB statmena tiesei OO_1.
    2) Įrodykite, kad du apskritimai negali turėti daugiau kaip du susikirtimo taškus.
15. 1) Per apskritimo tašką A nubrėžta tiesė, neliečianti apskritimo. Iš centro O nuleistas statmuo OB į tą tiesę. Atkarpos AB tęsinyje nubrėžta atkarpa $BC=AB$. Įrodykite, kad taškas C priklauso apskritimui.
    2) Tiesė ir apskritimas turi tik vieną bendrą tašką. Įrodykite, kad tiesė tame taške liečia apskritimą.
    3) Du apskritimai turi tik vieną bendrą tašką. Įrodykite, kad jie tame taške liečiasi.
16. 1) Iš taško M išvestos dvi apskritimo liestinės (84 pav.). Įrodykite, kad liestinių atkarpos MP ir MQ yra lygios.
    2) Įrodykite, kad per vieną tašką gali eiti ne daugiau kaip dvi apskritimo liestinės.



84 pav.

17. Nubraižykite trikampį, kurio duotos kraštinės a, b ir c, kai: 1) $a=2$ cm, $b=3$ cm, $c=4$ cm; 2) $a=3$ cm, $b=4$ cm, $c=5$ cm; 3) $a=4$ cm, $b=5$ cm, $c=6$ cm.
18. Nubraižytas trikampis ABC. Nubraižykite jam lygų trikampį ABD.
19. Nubraižykite trikampį, kurio žinomos dvi kraštinės ir apibrėžtinio apskritimo spindulys.
20. Nubraižykite duoto spindulio apskritimą, einantį per du duotuosius taškus.
21. Nubraižykite trikampį ABC, kai duota:
1) dvi kraštinės ir kampas tarp jų:

a) $AB=5$ cm, $AC=6$ cm, $\angle A=40°$;
b) $AB=3$ cm, $BC=5$ cm, $\angle B=70°$;

2) kraštinė ir prie jos esantys kampai:

a) $AB=6$ cm, $\angle A=30°$, $\angle B=50°$;
b) $AB=4$ cm, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.

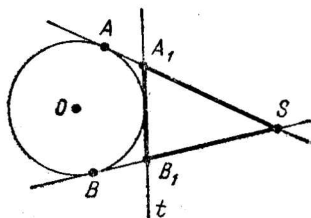
22. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir kampas, esantis prieš didesniąją kraštinę:

1) $a=6$ cm, $b=4$ cm, $\alpha=70°$;
2) $a=4$ cm, $b=6$ cm, $\gamma=100°$.

23. Nubraižykite lygiašonį trikampį, kai duota šoninė kraštinė ir kampas prie pagrindo.
24. Padalykite kampą į keturias lygias dalis.
25. Nubraižykite 60° ir 30° kampus.
26. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir pusiaukraštinė, išvesta į vieną tų kraštinių.
27. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir pusiaukraštinė, išvesta į trečią kraštinę.
28. Nubraižykite trikampio pusiaukraštines ir aukštines.
29. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, pusiaukraštinė, išvesta į tą kraštinę, ir apibrėžtinio apskritimo spindulys.
30. Nubraižykite statų trikampį, kai duota įžambinė ir statinis.
31. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir aukštinė, nuleista į trečią kraštinę.
32. Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė ir į ją išvesta pusiaukraštinė bei aukštinė.
33. Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir aukštinė, nuleista į vieną iš tų kraštinių.
34. Nubraižykite lygiašonį trikampį, kai duota šoninė kraštinė ir aukštinė, nuleista į pagrindą.
35. Nubraižykite lygiašonį trikampį, kai duotas pagrindas ir apibrėžtinio apskritimo spindulys.

36. Įrodykite, kad taškai, nuo duotos tiesės nutolę atstumu h, sudaro dvi tieses, lygiagrečias tai tiesei ir nutolusias atstumu h nuo jos.
37. Tiesėje raskite tašką, nutolusį duotu atstumu nuo kitos tiesės.
38. Duoti taškai A, B ir C. Raskite tašką X, kuris yra vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, o nuo taško C nutolęs duotu atstumu.
39. Raskite tiesės tašką, vienodai nutolusį nuo dviejų duotų taškų.
40. Duoti keturi taškai: A, B, C ir D. Raskite tašką X, kuris yra vienodai nutolęs nuo taškų A ir B ir vienodai nutolęs nuo taškų C ir D.
41. Nubraižykite trikampį, kurio žinoma viena kraštinė, kampas prie tos kraštinės ir kitų dviejų kraštinių suma.
42. Nubraižykite trikampį, kurio žinoma viena kraštinė, kampas prie tos kraštinės ir kitų dviejų kraštinių skirtumas.
43. Nubraižykite statų trikampį, kai žinomas jo statinis ir kito statinio bei įžambinės suma.
44. Nubraižykite trikampį, kurio žinoma kraštinė, prieš ją esantis kampas ir aukštinė, nuleista iš to kampo viršūnės.
45. Nubrėžkite apskritimą, kuris liečia duoto kampo kraštines, be to, vieną kraštinę — duotame taške.
46. Trikampio kraštinė lygi 10 cm, o prieš ją esantis kampas — 150°. Raskite apibrėžtinio apskritimo spindulį.
47. Taškai A, B ir C priklauso apskritimui. Raskite stygą AC, kai kampas ABC lygus 30°, o apskritimo skersmuo 10 cm.
48. Taškai A, B ir C priklauso apskritimui. Raskite kampą ABC, kai styga AC lygi apskritimo spinduliui. (Du atvejai.)
49. Įrodykite, kad apibrėžto apie statų trikampį apskritimo centras yra įžambinės vidurys.
50. Įrodykite, kad stačiojo trikampio pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę, jį dalija į du lygiašonius trikampius.
51. Nubraižykite statų trikampį, kurio žinoma įžambinė ir aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės į įžambinę.
52. Pažymėti keturi apskritimo taškai: A, B, C ir D. Raskite kampą ADC, kai kampas ABC lygus α. (Du atvejai.)
53. Apskritimo stygos AD ir BC susikerta. Kampai ABC ir ACD atitinkamai lygūs 50° ir 80°. Raskite kampą CAD.
54. 1) Per duotą tašką nubrėžkite tiesę, liečiančią duotą apskritimą.

2) Kaip nubrėžti dviejų apskritimų bendrą liestinę?



85 pav.

55. 1) Per tašką S nubrėžtos apskritimo liestinės SA ir SB (85 pav.). Liestinė t kerta atkarpas SA ir SB taškuose A_1 ir B_1. Įrodykite, kad trikampio SA_1B_1 perimetras nepriklauso nuo to, kokia liestinė t nubrėžta, ir lygus $SA+SB$.

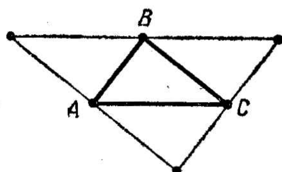
2) Duotas kampas ir taškas. Kaip

per tą tašką nubrėžti tiesę, kad ji nuo duotojo kampo nukirstų nurodyto perimetro trikampį?

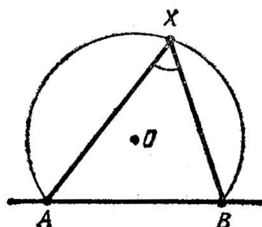
56. 1) Įrodykite, kad dviejų trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta (nėra lygiagretūs).

2) Įrodykite, kad visų trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta viename taške.

3) Įrodykite, kad apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti vieną ir tik vieną apskritimą.



86 pav.



87 pav.

57. 1) Per trikampio ABC viršūnes nubrėžtos tiesės, lygiagrečios prieš jas esančioms kraštinėms (86 pav.). Jų susikirtimo taškai yra naujo trikampio viršūnės. Įrodykite, kad pirmo trikampio viršūnės yra antro trikampio kraštinių vidurio taškai.

2) Įrodykite, kad tiesės, kuriose yra trikampio aukštinės, susikerta viename taške.

58. 1) Įrodykite, kad dvi trikampio pusiaukampinės susikerta.

2) Įrodykite, kad visos trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške.

3) Įrodykite, kad į kiekvieną trikampį galima įbrėžti vieną ir tik vieną apskritimą.

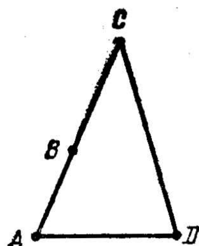
59. Braižomi nurodyto laipsninio mato kampai, kurių kraštinės eina per du duotus taškus, o viršūnės yra vienoje pusėje nuo tiesės, jungiančios tuos taškus. Įrodykite, kad tų kampų viršūnių geometrinė vieta yra apskritimo dalis, kurios galai yra tie taškai (87 pav.).

§ 6. KETURKAMPIAI

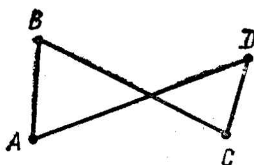
KETURKAMPIO APIBRĖŽIMAS

Keturkampiu vadinama figūra, kurią sudaro keturi taškai ir keturios nuosekliai juos jungiančios atkarpos. Čia turima galvoje, kad bet kurie trys iš tų taškų nepriklauso vienai tiesei, o juos jungiančios atkarpos nesusikerta. Tie keturi taškai vadinami keturkampio *viršūnėmis*, o juos jungiančios atkarpos — keturkampio ***kraštinėmis***.

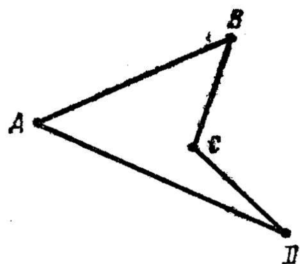
Uždavinys (1). 88, 89 ir 90 paveiksluose pavaizduotos trys figūros, kurių kiekvieną sudaro keturi taškai ir keturios nuosekliai juos jungiančios atkarpos. Kuri iš tų figūrų yra keturkampis?



88 pav.



89 pav.

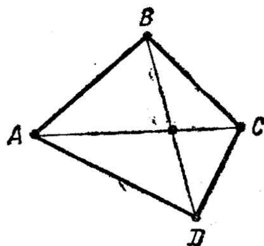


90 pav.

Sprendimas. Keturkampis yra tik 90 paveiksle pavaizduota figūra, nes 88 paveiksle pavaizduotos figūros taškai *A*, *B* ir *C* priklauso vienai tiesei, o 89 paveiksle pavaizduotos figūros atkarpos *BC* ir *AD* susikerta.

Gretimomis viršūnėmis vadinamos keturkampio viršūnės, kurios yra vienos kraštinės galai. Negretimos viršūnės vadinamos *priešingomis*. Atkarpos, jungiančios priešingąsias keturkampio viršūnes, vadinamos jo *įstrižainėmis*. 91 paveiksle pavaizduoto keturkampio įstrižainės yra atkarpos *AC* ir *BD*.

Keturkampio kraštinės, išeinančios iš vienos viršūnės, vadinamos *gretimomis kraštinėmis*. Neturinčios bendro galo kraštinės vadinamos *priešingomis kraštinėmis*. Keturkampio (žr. 91 pav.) priešingos kraštinės yra *AB* ir *CD*, *BC* ir *AD*.



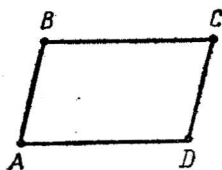
91 pav.

Žymėdami keturkampį nurodome, jo viršūnes. Pavyzdžiui, 91 paveiksle pavaizduotas keturkampis, žymimas *ABCD*. Greta parašytos raidės reiškia gretimas viršūnes. Keturkampį, kurį matote 91 paveiksle, galima žymėti ir *BCDA*, ir *CDAB*, bet negalima žymėti *ABDC*, nes viršūnės *B* ir *D* nėra gretimos.

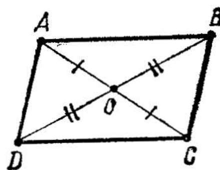
LYGIAGRETAINIS

Lygiagretainiu vadiname keturkampį, kurio priešingos kraštinės yra lygiagrečios arba yra lygiagrečiose tiesėse (92 pav.).

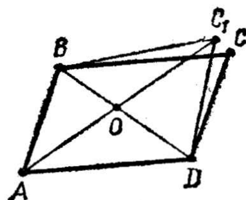
6.1 teorema. ***Jei susikertančias keturkampio įstrižaines susikirtimo taškas dalija pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis.***



92 pav.



93 pav.



94 pav.

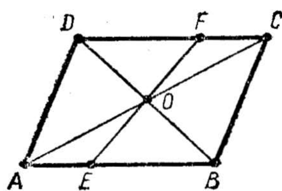
Įrodymas. Tarkime, kad keturkampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O (93 pav.). Trikampis AOD lygus trikampiui COB, nes jų kampai prie viršūnės O lygūs kaip kryžminiai, $OB=OD$ ir $OA=OC$ žinome iš teoremos sąlygos. Todėl kampas OBC lygus kampui ODA. Tie kampai yra vidaus priešiniai, gauti, tieses AD ir BC perkirtus tiese BD. Remdamiesi 4.2 teorema, darome išvadą, kad tiesė AD lygiagreti tiesei BC. Kad tiesė AB lygiagreti tiesei CD, įrodoma, remiantis trikampių AOB ir COD lygumu. Teorema įrodyta.

6.2 teorema (atvirkštinė 6.1 teoremai). ***Lygiagretainio įstrižainės susikerta, ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau.***

Įrodymas. Nubrėžkime lygiagretainio $ABCD$ (94 pav.) įstrižainę BD. Pažymėkime jos vidurio tašką O ir atkarpos AO tęsinyje nubrėžkime atkarpą OC_1, lygią AO. Iš 6.1 teoremos aišku, kad keturkampis ABC_1D yra lygiagretainis. Todėl tiesė BC_1 lygiagreti tiesei AD. Kadangi per tašką B galima nubrėžti tik vieną tiesę, lygiagrečią tiesei AD, tai tiesė BC_1 sutampa su tiese BC. Panašiai įsitikiname, kad tiesė DC_1 sutampa su tiese DC. Vadinasi, taškas C_1 sutampa su tašku C, o lygiagretainis $ABCD$ — su lygiagretainiu ABC_1D. Todėl jo įstrižainės susikerta, ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau. Teorema įrodyta.

Uždavinys (6). Per lygiagretainio įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė. Įrodykite, kad jos atkarpą, įterptą tarp lygiagrečiųjų kraštinių, tas taškas dalija pusiau.

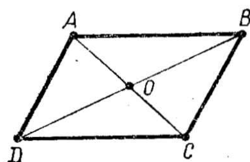
Sprendimas. Sakykime, tiesė EF kerta lygiagretainio $ABCD$ lygiagrečiąsias kraštines AB ir CD (95 pav.). Trikampis OAE lygus trikampiui OCF pagal antrąjį požymį. Jų kraštinės OA ir OC lygios, nes taškas O yra įstrižainės AC vidurys (6.2 teorema). Kampai prie viršūnės O lygūs kaip kryžminiai, o kampai EAO ir FCO lygūs kaip vidaus priešiniai prie lygiagrečių tiesių AB ir CD bei kirstinės AC. Kadangi trikampiai



95 pav.

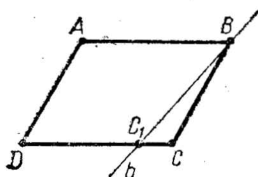
lygūs, tai jų atitinkamos kraštinės lygios: $OE=OF$. Tai ir reikėjo įrodyti.

6.3 teorema. ***Lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios, priešingieji kampai lygūs.***



96 pav.

Įrodymas. Sakykime, keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis (96 pav.). Nubrėžkime to lygiagretainio įstrižaines. Jų susikirtimo tašką pažymėkime O. Priešingosios kraštinės AB ir CD lygios. Tai išplaukia iš trikampių AOB ir COD lygumo. Tų trikampių kampai prie viršūnės O lygūs kaip kryžminiai; be to, $OA=OC$ ir $OB=OD$ pagal 6.2 teoremą. Panašiai iš to, kad trikampiai AOD ir COB lygūs, išplaukia, jog kitos dvi priešingosios lygiagretainio kraštinės — AD ir BC — lygios.



97 pav.

Priešingųjų kampų ABC ir CDA lygumas išplaukia iš trikampių ABC ir CDA lygumo. Jų atitinkamos kraštinės lygios: jau įrodyta, kad $AB=CD$ ir $BC=DA$; kraštinė AC bendra. Iš to, kad trikampiai BCD ir DAB lygūs, išplaukia, jog priešingieji kampai BCD ir DAB lygūs. Teorema įrodyta.

Uždavinys (15). Įrodykite, kad keturkampis, kurio dvi kraštinės lygios ir lygiagrečios, yra lygiagretainis.

Sprendimas. Tarkime, kad keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD yra lygios ir lygiagrečios (97 pav.). Per viršūnę B nubrėžkime tiesę b, lygiagrečią kraštinei AD. Ši tiesė kerta tiesę DC kuriame nors taške C_1. Taškas C_1 priklauso spinduliui DC, nes jo papildomasis spindulys ir tiesė b yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AD atžvilgiu. Keturkampis ABC_1D yra lygiagretainis, todėl, remiantis 6.3 teorema, $C_1D=AB$. Sąlygoje pasakyta, kad $AB=CD$. Vadinasi, $DC=DC_1$. Iš to aišku, kad taškai C ir C_1 sutampa. Todėl keturkampis $ABCD$ sutampa su lygiagretainiu ABC_1D. Taigi $ABCD$ yra lygiagretainis.

Stačiakampiu vadinamas lygiagretainis, kurio visi kampai statūs (98 pav., *a*).

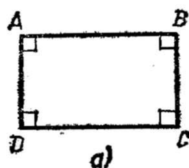
6.4 teorema. ***Stačiakampio įstrižainės lygios.***

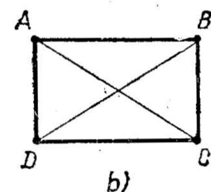
Įrodymas. Sakykime, keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis (98 pav., *b*).

Teoremos teiginys išplaukia iš stačiųjų trikampių BAD ir CDA lygumo. Šie trikampiai turi stačius kampus BAD ir CDA, bendrą statinį AD, o jų statiniai AB ir CD yra priešingos lygiagretainio kraštinės, todėl jie lygūs. Kadangi trikampiai lygūs, tai jų įžambinės lygios. Tos įžambinės yra stačiakampio įstrižainės. Teorema įrodyta.

Uždavinys (21). Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio visi kampai lygūs, yra stačiakampis.

Sprendimas. Prie vienos lygiagretainio kraštinės esantys kampai — vidaus vienašaliai. Todėl jų suma lygi 180°. Iš sąlygos žinome, kad tie kampai lygūs. Todėl abu jie yra statūs. Lygiagretainis, kurio visi kampai statūs, yra stačiakampis.



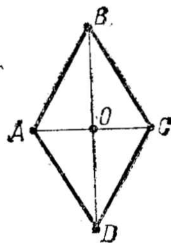


98 pav.

Rombu vadinamas lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios (99 pav.).

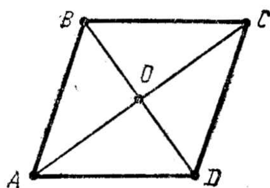
6.5 teorema. ***Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu. Rombo įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinės.***

Įrodymas. Rombo $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime O (žr. 99 pav.). Remiantis lygiagretainio savybe (6.2 teorema), $AO=OC$. Todėl atkarpa BO yra lygiašonio trikampio ABC pusiaukraštinė. Lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, išvesta į jo pagrindą, yra pusiaukampinė ir aukštinė. Vadinasi, įstrižainė BD yra kampo B pusiaukampinė ir statmena įstrižainei AC. Teorema įrodyta.

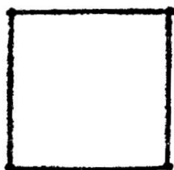


99 pav.

Uždavinys (28). Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos, yra rombas.



100 pav.



101 pav.

Sprendimas. Sakykime, lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės statmenos, taškas O — jo įstrižainių susikirtimo taškas (100 pav.). Trikampis AOB lygus trikampiui AOD pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį. Jų kampai prie viršūnės O statūs (tai žinome iš sąlygos); kraštinė AO bendra, $OB=OD$ pagal lygiagretainio savybę. Kadangi trikampiai lygūs, tai jų atitinkamos kraštinės lygios: $AB=AD$. Pritaikę 6.3 teoremą, gauname: $AD=BC$, $AB=CD$. Vadinasi, visos šio lygiagretainio kraštinės lygios. Todėl jis yra rombas.

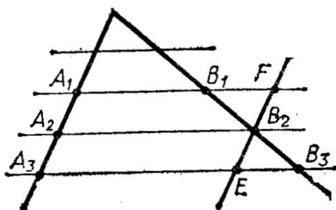
Kvadratu vadinamas stačiakampis, kurio visos kraštinės lygios (101 pav.). Kvadratas yra taip pat rombo atskiras atvejis. Todėl kvadratas turi ir stačiakampio, ir rombo savybes.

TALIO TEOREMA

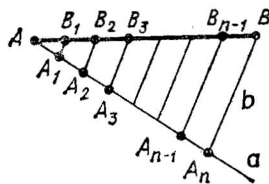
6.6 teorema (Talio* teorema). ***Jei lygiagrečios tiesės, kertančios kampo kraštines, vienoje jo kraštinėje iškerta lygias atkarpas, tai jos iškerta lygias atkarpas ir kitoje jo kraštinėje.***

Įrodymas. Sakykime, lygiagrečiosios tiesės kerta vieną kampo kraštinę taškuose A_1, A_2 ir A_3, o taškas A_2 yra tarp A_1 ir A_3 (102 pav.). Kitą kampo kraštinę tos tiesės kerta atitinkamai taškuose B_1, B_2 ir B_3. Įrodysime, kad $B_1B_2=B_2B_3$, kai $A_1A_2=A_2A_3$.

Iš pradžių įsitikinsime, kad taškas B_2 yra tarp taškų B_1 ir B_3. Taškai A_1 ir A_3 yra skirtingose tiesės A_2B_2 pusėse, nes atkarpa A_1A_3 kerta tą tiesę (taške A_2). Taškai A_1 ir B_1 yra vienoje tiesės A_2B_2 pusėje, nes atkarpa A_1B_1 lygiagreti tiesei A_2B_2, ir todėl jos nekerta. Panašiai įsitikiname, kad taškai A_3 ir B_3 taip pat yra

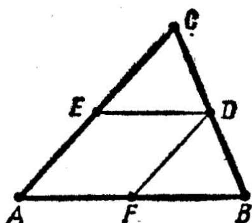


102 pav.

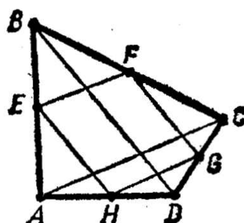


103 pav.

* Talis Miletietis — senovės graikų mokslininkas, gyvenęs VI a. pr. m. e.



104 pav.



105 pav.

vienoje tiesės A_2B_2 pusėje. Vadinasi, taškai B_1 ir B_3 yra skirtingose tiesės A_2B_2 pusėse. Todėl atkarpa B_1B_3 kerta tiesę A_2B_2 (taške B_2).

Per tašką B_2 nubrėžkime tiesę EF, lygiagrečią tiesei A_1A_3. Remdamiesi lygiagretainio savybe, gauname $A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=$ $=B_2E$. Kadangi $A_1A_2=A_2A_3$, tai $FB_2=B_2E$.

Trikampis B_2B_1F lygus trikampiui B_2B_3E pagal antrąjį požymį: įrodyta, kad $B_2F=B_2E$; kampai prie viršūnės B_2 lygūs kaip kryžminiai, o kampai B_2FB_1 ir B_2EB_3 lygūs kaip vidaus priešiniai prie lygiagrečių tiesių A_1B_1 ir A_3B_3 bei kirstinės EF. Iš trikampių lygumo išplaukia, kad jų atitinkamos kraštinės lygios: $B_1B_2=B_2B_3$. Teorema įrodyta.

6.7 u ž d a v i n y s. ***Duotą atkarpą AB padalykite į n lygių dalių.***

S p r e n d i m a s. Iš taško A išvedame pustiesę a, nesančią tiesėje AB (103 pav.). Pustiesėje a atidedame lygias atkarpas: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Per taškus A_n ir B nubrėžiame tiesę b. Tiesės, lygiagrečios tiesei b ir einančios per taškus A_1, A_2, ..., A_{n-1}, kerta atkarpą AB taškuose B_1, B_2, ..., B_{n-1}, kurie atkarpą AB dalija į n lygių dalių (6.6 teorema).

Trikampio *vidurine linija* vadiname atkarpą, kuri jungia dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus.

6.8 t e o r e m a. ***Trikampio vidurinė linija yra lygiagreti trečiajai kraštinei ir lygi jos pusei.***

Į r o d y m a s. Sakykime, DE — trikampio ABC vidurinė linija (104 pav.). Per tašką D nubrėžkime tiesę, lygiagrečią tiesei AB. Nubrėžtoji tiesė atkarpą AC dalija pusiau (aišku iš 6.6 teoremos). Todėl vidurinė linija DE yra toje tiesėje. Pirmasis teiginys įrodytas.

Nubrėžkime kitą vidurinę liniją DF. Kadangi ji lygiagreti kraštinei AC, tai keturkampis $AEDF$ yra lygiagretainis. Remda-

miesi lygiagretainio savybe, gauname lygybę $ED=AF$. Kadangi $AF=FB$ (Talio teorema), tai $ED=\frac{1}{2}AB$. Teorema įrodyta.

Uždavinys (47). Įrodykite, kad keturkampio kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

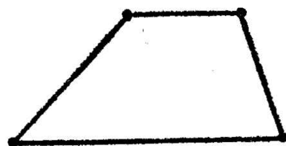
Sprendimas. Tarkime, kad keturkampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai yra E, F, G ir H (105 pav.). Kadangi EF yra trikampio ABC vidurinė linija, tai $EF \parallel AC$. Kadangi GH yra trikampio ADC vidurinė linija, tai $GH \parallel AC$. Vadinasi, $EF \parallel GH$, t. y. priešingosios keturkampio $EFGH$ kraštinės EF ir GH yra lygiagrečios. Panašiai įsitikiname, kad kitos dvi priešingosios kraštinės irgi lygiagrečios. Todėl keturkampis $EFGH$ yra lygiagretainis.

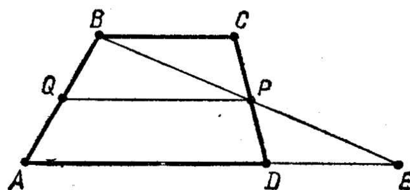
TRAPECIJA

Trapecija vadiname iškiląjį keturkampį, kuris turi tik dvi lygiagrečias priešingąsias kraštines (106 pav.). Tos lygiagrečios kraštinės vadinamos trapecijos *pagrindais*. Kitos dvi kraštinės vadinamos *šoninėmis kraštinėmis*. Trapecija, kurios šoninės kraštinės lygios, vadinama *lygiašone*. Atkarpa, kuri jungia šoninių kraštinių vidurio taškus, vadinama *trapecijos vidurine linija*.

6.9 teorema. ***Trapecijos vidurinė linija lygiagreti pagrindams ir lygi jų sumos pusei.***

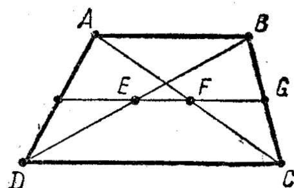
Įrodymas. Per trapecijos $ABCD$ (107 pav.) viršūnę B ir šoninės kraštinės CD vidurį P nubrėžkime tiesę. Ji kerta tiesę AD kuriame nors taške E. Trikampiai PBC ir PED lygūs pagal antrąjį trikampių lygumo požymį: $CP=DP$, nes P yra kraštinės CD vidurys, kampai prie viršūnės P lygūs, nes jie yra kryžminiai, o kampai PCB ir PDE lygūs, nes jie yra vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių BC ir AD bei kirstinės CD. Iš trikampių lygumo išplaukia, kad jų atitinkamos kraštinės lygios: $PB=PE$,


106 pav.



107 pav.

$BC=ED$. Vadinasi, trapecijos vidurinė linija PQ yra trikampio ABE vidurinė linija. Remiantis trikampio vidurinės linijos savybe, $PQ \| AE$ ir $PQ=\frac{1}{2}AE=$ $=\frac{1}{2}(AD+BC)$. Teorema įrodyta.



108 pav.

Uždavinys (60). Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, yra lygiagreti pagrindams ir lygi jų skirtumo pusei.

Sprendimas. Sakykime, trapecijos $ABCD$ didesnysis pagrindas yra kraštinė CD (108 pav.). Per trapecijos šoninės kraštinės BC vidurį G brėžiame tiesę, lygiagrečią pagrindams. Ji kerta įstrižaines taškuose E ir F, kurie yra įstrižainių vidurio taškai. Atkarpa EG yra trikampio DBC vidurinė linija, o FG — trikampio ABC vidurinė linija. Atkarpa EF yra tų vidurinių linijų skirtumas:

$$EF=\frac{CD}{2}-\frac{AB}{2}=\frac{CD-AB}{2}.$$

Tai ir reikėjo įrodyti.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kokia figūra vadinama keturkampiu?
2. Kurios keturkampio viršūnės vadinamos gretimomis ir kurios — priešingomis?
3. Ką vadiname keturkampio įstrižaine?
4. Kurios keturkampio kraštinės vadinamos gretimomis? Kurios kraštinės vadinamos priešingomis?
5. Kaip žymimas keturkampis?
6. Ką vadiname lygiagretainiu?
7. Įrodykite, kad keturkampis, kurio įstrižainės susikerta, yra lygiagretainis, kai susikirtimo taškas įstrižaines dalija pusiau.
8. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainės susikerta ir kad susikirtimo taškas jas dalija pusiau.
9. Įrodykite, kad lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios ir kad priešingieji kampai lygūs.
10. Ką vadiname stačiakampiu?
11. Įrodykite, kad stačiakampio įstrižainės lygios.
12. Ką vadiname rombu?

13. Įrodykite, kad rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu; kad rombo įstrižainės yra jo kampų pusiaukampinės.
14. Ką vadiname kvadratu? Išvardykite kvadrato savybes.
15. Įrodykite Talio teoremą.
16. Įrodykite, kad trikampio vidurinė linija lygi atitinkamos kraštinės pusei.
17. Kokį keturkampį vadiname trapecija?
18. Įrodykite, kad trapecijos vidurinė linija lygi pagrindų sumos pusei.

PRATIMAI

1. 88, 89 ir 90 paveiksluose pavaizduotos trys figūros, kurių kiekvieną sudaro keturi taškai ir keturios nuosekliai juos jungiančios atkarpos. Kuri iš tų figūrų yra keturkampis?
2. Nubraižykite keturkampį *PQRS*. Nurodykite jo priešingąsias kraštines ir viršūnes.
3. Duoti trys taškai, nepriklausantys vienai tiesei. Kiek galima nubraižyti lygiagretainių, kurių viršūnės yra šie taškai?
4. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 5 m. Per tašką, priklausantį to trikampio pagrindui, nubrėžtos dvi tiesės, lygiagrečios šoninėms kraštinėms. Apskaičiuokite gauto lygiagretainio perimetrą (visų kraštinių ilgių sumą).
5. Lygiagretainio *ABCD* perimetras lygus 10 cm. Apskaičiuokite įstrižainės *BD* ilgį, žinodami, kad trikampio *ABD* perimetras lygus 8 cm.
6. Per lygiagretainio įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė. Įrodykite, kad jos atkarpą, įterptą tarp lygiagrečiųjų kraštinių, tas taškas dalija pusiau.
7. Per lygiagretainio *ABCD* įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė, kuri nuo kraštinių *BC* ir *AD* nukerta atkarpas $BE=$ $=2$ m ir $AF=2{,}8$ m. Raskite kraštines *BC* ir *AD*.
8. Vienas lygiagretainio kampas lygus 40°. Raskite kitus to lygiagretainio kampus.
9. Dviejų lygiagretainio kampų skirtumas lygus 50°. Raskite jo kampus.
10. Ar gali du lygiagretainio kampai būti lygūs 40° ir 50°?
11. Lygiagretainio įstrižainė su dviem jo kraštinėmis sudaro 25° ir 35° kampus. Raskite to lygiagretainio kampus.
12. Raskite visus lygiagretainio kampus, kai dviejų kampų suma lygi: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
13. Raskite visus lygiagretainio kampus, kai dviejų kampų skirtumas lygus: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
14. Lygiagretainio *ABCD* kraštinės *BC* vidurys yra taškas *E*, o kraštinės *AD* vidurys — taškas *F*. Įrodykite, kad keturkampis *BEDF* yra lygiagretainis.
15. Įrodykite, kad keturkampis, kurio dvi kraštinės lygios ir lygiagrečios, yra lygiagretainis.

16. Nubrėžta lygiagretainio $ABCD$ kampo A pusiaukampinė, kuri kraštinę BC kerta taške E. Apskaičiuokite atkarpas BE ir EC, kai $AB=9$ cm, $AD=15$ cm.

17. Dviejų lygiagretainio kraštinių santykis lygus 3 : 4, o jo perimetras lygus 2,8 m. Raskite kraštines.

18. Lygiagretainio $ABCD$ perimetras lygus 3,8 m, o trikampio ABD perimetras lygus 3 m. Iš viršūnės B į kraštinę AD nuleistas statmuo ją dalija pusiau. Apskaičiuokite lygiagretainio įstrižainę BD ir kraštines.

19. Nubraižykite lygiagretainį, kai duota: 1) dvi kraštinės ir įstrižainė; 2) kraštinė ir dvi įstrižainės.

20. Nubraižykite lygiagretainį, kai duota: 1) dvi kraštinės ir kampas; 2) įstrižainės ir kampas tarp jų.

21. Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio visi kampai lygūs, yra stačiakampis.

22. Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio įstrižainės lygios, yra stačiakampis.

23. Stačiakampio kampo pusiaukampinė dalija kraštinę pusiau. Apskaičiuokite to stačiakampio perimetrą, kai mažesnioji jo kraštinė lygi 10 cm.

24. Stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas nuo mažesniosios kraštinės yra 4 cm toliau negu nuo didesniosios kraštinės. Stačiakampio perimetras lygus 56 cm. Raskite stačiakampio kraštines.

25. Iš apskritimo taško nubrėžtos dvi viena kitai statmenos stygos, kurių atstumai nuo centro lygūs 6 cm ir 10 cm. Raskite šių stygų ilgius.

26. Į statųjį trikampį, kurio abu statiniai lygūs 6 cm, įbrėžtas stačiakampis, turintis bendrą kampą su trikampiu. Apskaičiuokite šio stačiakampio perimetrą.

27. Į statų lygiašonį trikampį įbrėžtas stačiakampis, kurio dvi viršūnės yra įžambinėje, o kitos dvi — statiniuose. Stačiakampio kraštinių santykis lygus 5 : 2, o trikampio įžambinė lygi 45 cm. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines.

28. Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos, yra rombas.

29. Įrodykite, kad lygiagretainis, kurio įstrižainė yra jo kampų pusiaukampinė,— rombas.

30. Kampai, kuriuos rombo įstrižainės sudaro su viena jo kraštine, sutinka kaip 4 : 5. Raskite to rombo kampus.

31. Įrodykite, kad keturkampis, kurio visos kraštinės lygios, yra rombas.

32. Viena rombo įstrižainė lygi kraštinei. Raskite to rombo kampus.

33. Nubraižykite rombą, kai duota: 1) kampas ir įstrižainė, išvesta iš to kampo viršūnės; 2) įstrižainė ir prieš ją esantis kampas.

34. Nubraižykite rombą, kai duota: 1) kraštinė ir įstrižainė; 2) dvi įstrižainės.

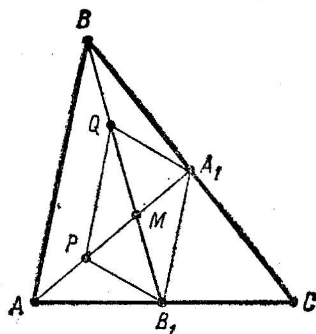
35. Į statų lygiašonį trikampį, kurio statinis lygus 2 m, įbrėžtas kvadratas, turintis bendrą kampą su trikampiu. Raskite kvadrato perimetrą.
36. Nuo kvadrato $ABCD$ kraštinių nukirstos lygios atkarpos $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Įrodykite kad keturkampis $A_1B_1C_1D_1$ yra kvadratas.
37. Kvadrato įstrižainė lygi 4 m. Jo kraštinė lygi kito kvadrato įstrižainei. Raskite antro kvadrato kraštinę.
38. Kvadrato kraštinė lygi 1 m. Jo įstrižainė lygi kito kvadrato kraštinei. Apskaičiuokite antro kvadrato įstrižainę.
39. Į kvadratą įbrėžtas stačiakampis, kurio kraštinės lygiagrečios kvadrato įstrižainėms. Kiekvienoje kvadrato kraštinėje yra stačiakampio viršūnė. Kvadrato įstrižainė lygi 12 m. Viena stačiakampio kraštinė dukart ilgesnė už kitą. Raskite stačiakampio kraštines.
40. Į statų lygiašonį trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio dvi viršūnės yra įžambinėje, o kitos dvi — statiniuose. Raskite kvadrato kraštinę, kai įžambinė lygi 3 m.
41. Iš taško išvestos dvi viena kitai statmenos apskritimo liestinės. Apskritimo spindulys lygus 10 cm. Raskite liestinės ilgį (atstumą nuo taško iki lietimosi taško).
42. Trikampio kraštinės lygios 8 cm, 10 cm ir 12 cm. Braižomas trikampis, kurio viršūnės yra duoto trikampio kraštinių vidurio taškai. Raskite nubraižyto trikampio kraštines.
43. Trikampio perimetras lygus 12 cm. Jo kraštinių vidurio taškai sujungti atkarpomis. Raskite gauto trikampio perimetrą.
44. Lygiašonio trikampio perimetras lygus 16 cm. Jo pagrindui lygiagreti vidurinė linija lygi 3 cm. Raskite trikampio kraštines.
45. Kaip nubraižyti trikampį, kai žinomi jo kraštinių vidurio taškai?
46. Įrodykite, kad trikampio viršūnės yra vienodai nutolusios nuo tiesės, einančios per dviejų kraštinių vidurio taškus.
47. Įrodykite, kad keturkampio kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.
48. Keturkampio įstrižainės lygios 10 m ir 12 m. Apskaičiuokite 47 uždavinyje nurodyto lygiagretainio kraštines.
49. Keturkampio įstrižainės lygios a ir b. Raskite perimetrą keturkampio, kurio viršūnės yra duoto keturkampio kraštinių vidurio taškai.
50. Įrodykite, kad stačiakampio kraštinių vidurio taškai yra rombo viršūnės.
51. Padalykite duotąją atkarpą į nurodytą skaičių lygių dalių: 1) 3; 2) 5; 3) 6.
52. Trapecijos šoninė kraštinė padalyta į tris lygias dalis. Nubrėžtos atkarpos, lygiagrečios pagrindams ir jungiančios dalijimo taškus su kitos šoninės kraštinės taškais. Trapecijos

pagrindai lygūs 2 m ir 5 m. Raskite nubrėžtų atkarpų ilgius.

53. Įrodykite, kad lygiašonės trapecijos kampai prie pagrindo yra lygūs.

54. Lygiašonės trapecijos priešingųjų kampų skirtumas lygus 40°. Apskaičiuokite tos trapecijos kampus.

55. Didesnysis lygiašonės trapecijos pagrindas lygus 2,7 m, jo šoninė kraštinė lygi 1 m, o kampas tarp tų kraštinių lygus 60°. Raskite mažesnįjį pagrindą.



109 pav.

56. Lygiašonės trapecijos aukštinė, nubrėžta iš bukojo kampo viršūnės, dalija didesnįjį pagrindą į 6 cm ir 30 cm ilgio atkarpas. Raskite trapecijos pagrindus.

57. Mažesnysis lygiašonės trapecijos pagrindas lygus šoninei kraštinei, o įstrižainė jai statmena. Raskite trapecijos kampus.

58. Vienoje tiesės pusėje yra taškai A ir B, nutolę nuo jos 10 m ir 20 m. Apskaičiuokite atstumą nuo atkarpos AB vidurio iki tos tiesės.

59. Skirtingose tiesės pusėse yra taškai A ir B, nutolę nuo jos 10 cm ir 4 cm. Raskite atstumą nuo atkarpos AB vidurio iki tos tiesės.

60. Įrodykite, kad atkarpa, jungianti trapecijos įstrižainių vidurio taškus, yra lygiagreti pagrindams ir lygi jų skirtumo pusei.

61. Trapecijos pagrindai sutinka, kaip $2:3$, o vidurinė linija lygi 5 m. Raskite pagrindus.

62. Apskritimo skersmens galai nuo liestinės nutolę 1,6 m ir 0,6 m. Raskite skersmens ilgį.

63. Trapecijos vidurinė linija lygi 7 cm, o vienas jos pagrindas 4 cm didesnis už kitą. Raskite tos trapecijos pagrindus.

64. Iš lygiašonės trapecijos bukojo kampo viršūnės nubrėžta aukštinė dalija didesnįjį pagrindą į dalis, kurių ilgiai lygūs a ir b ($a>b$). Raskite trapecijos vidurinę liniją.

65. Nubraižykite trapeciją, kai žinomi pagrindai ir šoninės kraštinės.

66. Nubraižykite trapeciją, kai žinomi pagrindai ir įstrižainės.

67. 1) Trikampio ABC pusiaukraštinės AA_1 ir BB_1 susikerta taške M (109 pav.). Nubrėžta trikampio AMB vidurinė linija PQ. Įrodykite, kad keturkampis A_1B_1PQ yra lygiagretainis.

2) Įrodykite, kad dvi bet kurios trikampio pusiaukraštinės susikerta ir kad susikirtimo taškas pusiaukraštinę dalija santykiu $2:1$, skaitant nuo viršūnės.

3) Įrodykite, kad visos trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške.

68. Įrodykite, kad įbrėžtinio keturkampio priešingųjų kampų suma lygi 180°.

69. Įrodykite, kad apibrėžtinio keturkampio priešingųjų kraštinių ilgių sumos yra vienodos.

§ 7. PITAGORO TEOREMA

KAMPO KOSINUSAS

Stačiojo trikampio smailiojo kampo *kosinusu* vadiname statinio, esančio prie to kampo, ir įžambinės santykį. Kampo α kosinusas žymimas šitaip: $\cos\alpha$. Įsitikinsime, kad kampo kosinusas priklauso tik nuo kampo laipsninio mato, t. y. dviejuose trikampiuose, kurių smailieji kampai lygūs, kampo kosinusai yra vienodi.

7.1 teorema. ***Kampo kosinusas priklauso tik nuo kampo laipsninio mato.***

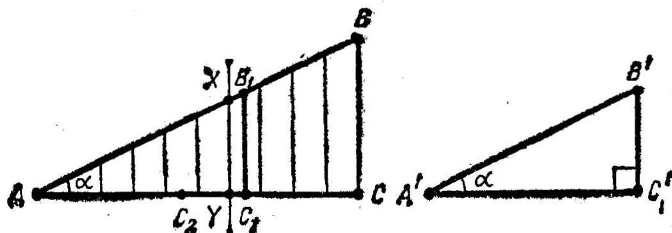
Įrodymas. Sakykime, ABC ir $A'B'C'$ yra statieji trikampiai, kurių kampai prie viršūnių A ir A' lygūs α (110 pav.). Reikia įrodyti, kad

$$\frac{A'C'}{A'B'}=\frac{AC}{AB}. \qquad (*)$$

Nuo spindulio AB nukertame atkarpą AB_1, lygią atkarpai $A'B'$, ir iš taško B_1 nuleidžiame statmenį B_1C_1 į tiesę AC. Trikampiai AB_1C_1 ir $A'B'C'$ lygūs, nes turi lygias įžambines ir po lygų smailų kampą. Todėl $A'C'=AC_1$. Vadinasi, norint įrodyti lygybę (*), užtenka įrodyti, kad

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}.$$

Tarkime, kad $\frac{AC_1}{AB_1}\neq\frac{AC}{AB}$, pavyzdžiui, $\frac{AC_1}{AB_1}>\frac{AC}{AB}$. Pasirenkame atkarpos AC_1 tašką C_2, kad būtų teisinga lygybė $\frac{AC_2}{AB_1}=\frac{AC}{AB}$. Atkarpą AC padalijame į n lygių dalių ir per dalijimo taškus nubrėžiame tiesei BC lygiagrečias tieses. Jos, kaip pasakyta Talio teoremoje, atkarpą AB padalija į n lygių atkarpų. Kai skaičius n pakankamai didelis, atkarpoje C_1C_2 bus dalijimo taškų. Vieną tų



110 pav.

taškų pažymime raide Y, o atitinkamą kraštinės AB tašką — raide X.

Tarkime, kad $a=\frac{AC}{n}$, $b=\frac{AB}{n}$. Atkarpoje AY esančių mažųjų atkarpų skaičių pažymėkime raide m. Tuomet $AC=na$, $AB=nb$, $AY=ma$, $AX=mb$. Iš to aišku, kad

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AY}{AX}.$$

Šios lygybės dešinėje pusėje parašytą atkarpą AY pakeiskime mažesne atkarpa AC_2, o atkarpą AX — didesne atkarpa AB_1. Tuomet dešinioji pusė sumažės, todėl gausime nelygybę $\frac{AC}{AB}>\frac{AC_2}{AB_1}$. Bet tašką C_2 pasirinkome tokį, kad $\frac{AC}{AB}=\frac{AC_2}{AB_1}$. Gavome prieštarą. Teorema įrodyta.

Uždavinys (1). Nubraižykite kampą, kurio kosinusas lygus $\frac{3}{5}$.

Sprendimas. Braižome statų trikampį, kurio statinio ilgis lygus 3 vienetams, o įžambinės — 5 vienetams. To trikampio kampas, esantis prieš antrą statinį, bus ieškomasis kampas.

PITAGORO TEOREMA

7.2 teorema (Pitagoro* teorema). ***Stačiojo trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai.***

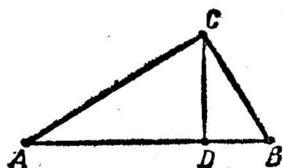
Įrodymas. Sakykime, stačiojo trikampio ABC kampas C yra status. Iš jo viršūnės C nubrėžiame aukštinę CD (111 pav.).

Pagal kampo kosinuso apibrėžimą

$$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},$$

todėl $AB\cdot AD=AC^2$. Panašiai

$$\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB},$$



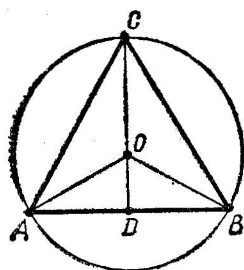
111 pav.

todėl $AB\cdot BD=BC^2$. Sudėję gautąsias lygybes panariui ir pastebėję, kad $AD+DB=AB$, gauname

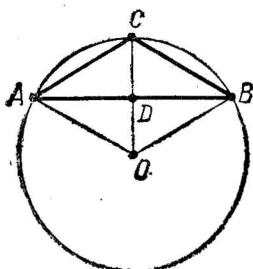
$$AC^2+BC^2=AB(AD+DB)=AB^2.$$

Teorema įrodyta.

* Pitagoras — senovės graikų mokslininkas, gyvenęs VI a. pr. m. e.



a)



b)

112 pav.

Iš Pitagoro teoremos išplaukia, kad ***bet kuris stačiojo trikampio statinis yra mažesnis už įžambinę.*** Tai savo ruožtu reiškia, kad ***smailiojo kampo*** α ***kosinusas yra mažesnis už 1***, t. y. $\cos\alpha < 1$.

Uždavinys (16). Apie lygiašonį trikampį, kurio pagrindas a, šoninė kraštinė b, apibrėžtas apskritimas. Raskite to apskritimo spindulį.

Sprendimas. Rasime aukštinę CD (112 pav.), nuleistą į pagrindą. Pritaikę Pitagoro teoremą, gauname:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Apibrėžtinio apskritimo spindulį pažymėkime raide R. Jei apskritimo centras O yra aukštinėje CD (112 pav., a), tai $OD = CD - R$. Jei apskritimo centras yra aukštinės tęsinyje (112 pav., b), tai $OD = R - CD$. Pritaikę Pitagoro teoremą, gauname $AO^2 = OD^2 + AD^2$, arba

$$R^2 = \left(\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

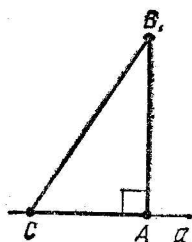
Iš čia

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

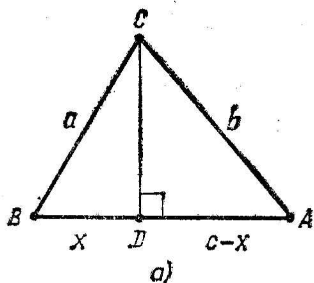
Sakykime, BA yra statmuo, nuleistas iš taško B į tiesę a, o C — bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su tašku A. Atkarpa BC vadinama *pasvirąja*, išvesta iš taško B į tiesę a (113 pav.). Taškas C vadinamas *pasvirosios pagrindu.* Atkarpa AC vadinama *pasvirosios projekcija.*

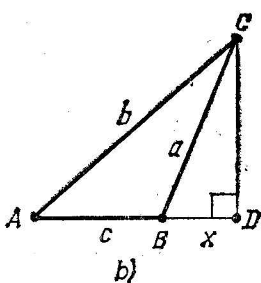
Remdamiesi Pitagoro teorema, darome išvadą: iš vieno taško išvedus į tiesę statmenį ir pasvirąsias, ***pasviroji bus didesnė už statmenį, lygios pasvirosios turės lygias projekcijas, iš dviejų pasvirųjų didesnė bus ta, kurios projekcija didesnė.***

Uždavinys (21). Trikampio kraštinės lygios a, b ir c. Raskite to trikampio aukštinę, nuleistą į kraštinę c.



113 pav.





114 pav.

Sprendimas. Raide x pažymėkime kraštinės a projekciją tiesėje, kurioje yra kraštinė c. Tuomet kraštinės b projekcija toje tiesėje bus arba $c-x$ (114 pav., a), arba $c+x$ (114 pav., b). Pirmuoju atveju, remdamiesi Pitagoro teorema, rašome:

$$CD^2=a^2-x^2,\quad CD^2=b^2-(c-x)^2.$$

Iš čia gauname lygtį

$$a^2-x^2=b^2-(c-x)^2,$$

kurią sprendžiame šitaip:

$$a^2-x^2=b^2-c^2+2cx-x^2,\quad a^2=b^2-c^2+2cx,$$

$$x=\frac{1}{2c}(a^2-b^2+c^2).$$

Dabar galime rasti aukštinę CD:

$$CD=\sqrt{a^2-\frac{1}{4c^2}(a^2-b^2+c^2)^2}.$$

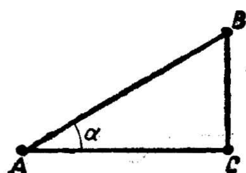
Antruoju atveju gauname tą patį atsakymą. Apskaičiuokite patys.

STAČIOJO TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ SĄRYŠIAI

Tarkime, kad stačiojo trikampio ABC kampas C status, o smailusis kampas prie viršūnės A lygus α (115 pav.). Jau sakėme, kad cos α *lygus statinio, esančio prie kampo* α, *ir įžambinės santykiui.*

Kampo α *sinusu* (žymimu $\sin\alpha$) vadiname statinio BC, esančio prieš kampą α, ir įžambinės AB santykį:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}.$$



115 pav.

Kampo α *tangentu* (žymimu $\operatorname{tg}\alpha$) vadiname statinio BC, esančio prieš kampą α, ir statinio AC, esančio prie kampo α, santykį:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}.$$

Kampo sinusas ir tangentas, kaip ir kosinusas, priklauso tik nuo kampo didumo.

Iš tikrųjų, remdamiesi Pitagoro teorema, gauname

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2},$$

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\sqrt{1-\left(\frac{AC}{AB}\right)^2}=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Kadangi $\cos\alpha$ priklauso tik nuo kampo didumo, tai ir $\sin\alpha$ priklauso tik nuo kampo didumo. Antra vertus,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{AB}:\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Iš to aišku, kad ir $\operatorname{tg}\alpha$ priklauso tik nuo kampo didumo.

Iš $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ apibrėžimų gauname tokias taisykles:

Statinis, esantis prieš kampą α, ***lygus įžambinei, padaugintai iš*** $\sin\alpha$.

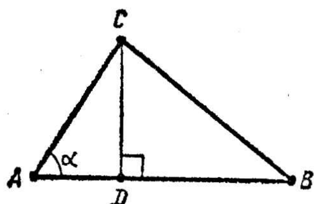
Statinis, esantis prie kampo α, ***lygus įžambinei, padaugintai iš*** $\cos\alpha$.

Statinis, esantis prieš kampą α, ***lygus antrajam statiniui, padaugintam iš*** $\operatorname{tg}\alpha$.

Taikydami šias taisykles, kai žinome stačiojo trikampio vieną kraštinę ir smailųjį kampą, galime rasti kitas dvi kraštines arba, kai žinome dvi kraštines, rasti smailiuosius kampus.

Uždavinys (31). Žinome stačiojo trikampio įžambinę c ir smailųjį kampą α. Raskite statinius, jų projekcijas įžambinėje ir aukštinę, nuleistą į įžambinę.

Sprendimas (116 pav.). $AC=AB\cos\alpha=c\cos\alpha$; $BC=AB\sin\alpha=c\sin\alpha$; $BD=BC\sin\alpha=c\sin^2\alpha$; $AD=AC\cos\alpha=c\cos^2\alpha$; $CD=AC\sin\alpha=c\sin\alpha\cos\alpha$.



116 pav.

Iš tų reiškinių gauname tokias lygybes:

$$AC=\sqrt{AB\cdot AD},\ BC=\sqrt{AB\cdot BD},\ CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

Tas lygybes pravartu įsidėmėti. Žodžiais jas išreiškiame šitaip:
Stačiojo trikampio statinis yra įžambinės ir jo statinio projekcijos įžambinėje geometrinis vidurkis.

Stačiojo trikampio aukštinė, išvesta iš stačiojo kampo viršūnės, yra statinių projekcijų įžambinėje geometrinis vidurkis.

Skaičių a ir b geometriniu vidurkiu vadiname skaičių $x=\sqrt{ab}$. Jis yra proporcijos $a:x=x:b$ vidurinis narys.

SINUSŲ, KOSINUSŲ IR TANGENTŲ LENTELIŲ NAUDOJIMAS

Yra sudarytos specialios $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ lentelės. Žinant kampą α, joje galima rasti $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ arba, žinant $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ arba $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmę, rasti atitinkamą kampą. Kaip naudoti tas lenteles, aiškinsime spręsdami 32 uždavinį.

Uždavinys (32). 1) Naudodamiesi lentelėmis, raskite $\sin 22°$, $\sin 22°36'$, $\sin 22°38'$, $\sin 22°41'$; $\cos 68°$, $\cos 68°18'$, $\cos 68°20'$, $\cos 68°23'$.

2) Raskite kampą x, kai $\sin x=0{,}2840$; $\sin x=0{,}2844$; $\cos x=$ $=0{,}2710$.

Sprendimas (žr. V. Bradis. Keturženklės matematinės lentelės, p. 52). 1) Rasime $\sin 22°$. Pirmame lentelės stulpelyje ieškome 22°. Šalia jo, antrame stulpelyje, randame skaičių 0,3746. Tai ir yra $\sin 22°$.

Rasime $\sin 22°36'$. Pirmajame stulpelyje vėl ieškome 22°. Eidami eilute, kurioje parašyta 22°, ieškome stulpelio, kurio viršuje parašyta 36'. Tame stulpelyje ir bus $\sin 22°36'$. Jis lygus 0,3843.

Rasime $\sin 22°38'$. Ieškome skaičiaus 6 kartotinio, kuris mažiausiai skiriasi nuo 38. Tai bus 36. Randame $\sin 22°36'$ ir prie jo pridedame pataisą, atitinkančią 2'. Pataisos, atitinkančios 1', 2' ir 3', pateiktos paskutiniuose trijuose lentelės stulpeliuose. Eilutėje, kurioje parašyta 22°, randame pataisą atitinkančią 2'. Ji lygi 5. Apskaičiuojame $\sin 22°38'=0{,}3843+0{,}0005=0{,}3848$.

Rasime $\sin 22°41'$. Ieškome $\sin 22°42'$ ir atimame pataisą, atitinkančią 1'. Sužinome, kad $\sin 22°41'=0{,}3856$.

Kosinuso reikšmes galima rasti sinusų lentelėse, remiantis lygybe $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ (ji bus išvesta, įrodant 7.3 teoremą). Tačiau kosinusą galima rasti ir tiesiogiai. Rasime cos 68°. Ketvirtame stulpelyje iš dešinės pusės ieškome 68°. Į kairę nuo jo parašytas skaičius 0,3746. Tai ir yra cos 68°. Atkreipiame dėmesį į tai, kad $\cos 68°=\cos(90°-22°)=\sin 22°$. Todėl sin 22° irgi lygus 0,3746.

Rasime cos 68°18′. Ieškome eilutės, kurioje parašyta 68°. Einame šia eilute į kairę. Stulpelyje, kurio apačioje parašyta 18′, randame cos 68°18′. Jis lygus 0,3697.

Ieškodami cos 68°20′, surandame cos 68°18′ ir pataisą, atitinkančią 2′. Pataisą reikia atimti. Gauname $\cos 68°20'=0{,}3697-0{,}0005=0{,}3692$.

Ieškodami cos 68°23′, randame cos 68°24′ ir pataisą, atitinkančią 1′. Ją reikia pridėti. Gauname $\cos 68°23'=0{,}3681+0{,}0003=0{,}3684$.

Atliekant veiksmus su pataisomis, reikia žinoti, kad, kampui didėjant, sinusas didėja, o kosinusas mažėja (žr. 7.4 teoremą). Todėl lengva suvokti, kada pataisą reikia pridėti, o kada — atimti.

Tangento reikšmės randamos tangentų lentelėse panašiai, kaip sinuso reikšmės sinusų lentelėse.

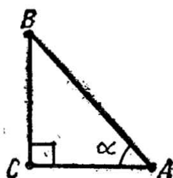
2) Rasime kampą x, kai $\sin x=0{,}2840$. Sinusų lentelėje ieškome skaičiaus 0,2840. Matome, kad tas skaičius yra eilutėje, kurios kairėje parašyta 16°, ir stulpelyje, kurio viršuje parašyta 30′. Vadinasi, $x=16°30'$.

Rasime x, kai $\sin x=0{,}2844$. Sinusų lentelėje ieškome skaičiaus 0,2844 arba jam artimiausio skaičiaus. Artimiausias skaičius yra 0,2840. Tai sin 16°30′. Jei pridėsime pataisą, atitinkančią 1′, tai gausime 0,2843. Pridėję pataisą, atitinkančią 2′, gautume 0,2846. Todėl 1′ tikslumu $x=16°31'$.

Rasime x, kai $\cos x=0{,}2710$. Lentelėje ieškome skaičiaus 0,2710 arba jam artimiausio skaičiaus. Tas skaičius yra 0,2706. Tai cos 74°18′. Turimasis skaičius yra didesnis. Todėl kampas bus mažesnis. Pataisos, atitinkančios 1′ ir 2′, yra 0,0003 ir 0,0006. Pasirenkame pataisą, atitinkančią 1′. Todėl 1′ tikslumu gauname $x=74°17'$.

Žinomą tangento reikšmę atitinkančio kampo ieškome tangentų lentelėje. Darome panašiai, kaip ieškodami sinusų lentelėje kampo, atitinkančio turimą sinuso reikšmę.

Įrodysime šias tapatybes: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.



117 pav.

Nubraižome statųjį trikampį ABC, kurio kampas prie viršūnės A lygus α (117 pav.). Pagal Pitagoro teoremą

$$BC^2+AC^2=AB^2.$$

Abi parašytosios lygybės puses padalijame iš AB^2:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1.$$

Kadangi $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, o $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$, tai

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Gautoji lygybė yra tapatybė. Ji teisinga, kai α — bet kuris smailusis kampas ($\alpha<90°$).

Antrąją tapatybę gausime, abi išvestosios tapatybės puses padaliję iš $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

arba

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Jei abi tapatybės $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ puses padalysime iš $\sin^2\alpha$, tai gausime trečiąją tapatybę:

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Šios tapatybės taikomos, kai žinomas vienas iš dydžių $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ arba $\operatorname{tg}\alpha$, o reikia rasti kitus du.

Uždavinys (47). Apskaičiuokite $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmes, kai $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

Sprendimas. Kadangi $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, tai $\sin\alpha=$ $=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}$.

KAI KURIŲ KAMPŲ SINUSO, KOSINUSO IR TANGENTO REIKŠMĖS

7.3 teorema. *Jei* α — *bet kuris smailus kampas, tai* $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$.

Įrodymas. Tarkime, kad stačiojo trikampio ABC smailusis kampas prie viršūnės A lygus α (118 pav.). Tuomet smailusis kampas prie viršūnės B lygus $90°-\alpha$. Remdamiesi apibrėžimu, rašome:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\quad \cos\alpha=\frac{AC}{AB},$$

$$\sin(90°-\alpha)=\frac{AC}{AB},\quad \cos(90°-\alpha)=\frac{BC}{AB}.$$

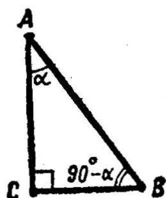
Iš antros ir trečios lygybės gauname lygybę $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$. Iš pirmos ir ketvirtos lygybės išplaukia lygybė $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$. Teorema įrodyta.

Apskaičiuosime 45° *kampo sinusą, kosinusą ir tangentą.* Tuo tikslu nubraižome statųjį trikampį, kurio smailus kampas lygus 45° (119 pav.). Antras smailus jo kampas irgi lygus 45°. Todėl trikampis yra lygiašonis. Jei to trikampio statiniai lygūs a, tai, remdamiesi Pitagoro teorema, sužinome, kad įžambinė lygi $a\sqrt{2}$. Vadinasi,

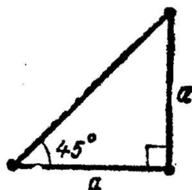
$$\sin 45°=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45°=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \text{tg}\,45°=\frac{a}{a}=1.$$

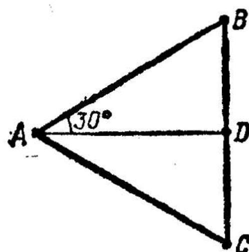
Apskaičiuosime 30° *kampo sinusą, kosinusą ir tangentą.* Nubraižome lygiakraštį trikampį ABC (120 pav.). Išvedame jo pusiaukraštinę AD. Ji bus pusiaukampinė ir aukštinė. Todėl trikampis ABD yra status, o jo kampas prie viršūnės A lygus 30°.



118 pav.



119 pav.



120 pav.

Jei lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a, tai $BD=\frac{a}{2}$. Remdamiesi Pitagoro teorema, apskaičiuojame AD:

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vadinasi,

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{2}:a=\frac{1}{2};\ \cos 30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}:a=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remdamiesi 7.3 teorema, gauname:

$$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\sqrt{3}.$$

KAIP KINTA sin α, cos α IR tg α, KAI KAMPAS α DIDĖJA

7.4 teorema. *Kai smailusis kampas α didėja,* sin α *ir* tg α *didėja, o* cos α *mažėja.*

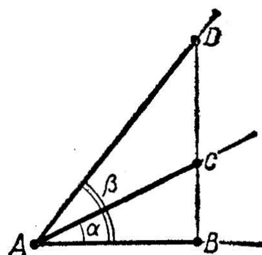
Įrodymas. Tarkime, kad α ir β yra smailūs kampai ir $\alpha<\beta$. Prie pustiesės AB vienoje pusplokštumėje nubraižykime kampus α ir β (121 pav.). Per tašką B nubrėžkime tiesę, statmeną tiesei AB. Kampų kraštines ji kirs taškuose C ir D. Kadangi $\alpha<\beta$, tai taškas C yra tarp taškų B ir D. Todėl $BC<BD$. Remdamiesi iš vieno taško išvestų pasvirųjų savybe, darome išvadą, kad $AC<AD$. Kadangi

$$\cos\alpha=\frac{AB}{AC},\ \cos\beta=\frac{AB}{AD},$$

tai $\cos\alpha>\cos\beta$. Vadinasi, kampui didėjant, kosinusas mažėja.

Kadangi $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, o kampui didėjant, $\cos\alpha$ mažėja, tai $\sin\alpha$ didėja.

Kadangi $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, tai $\operatorname{tg}\alpha$ didėja, kai didėja α ($\sin\alpha$ didėja, o $\cos\alpha$ mažėja, kai kampas α didėja). Teorema įrodyta.



121 pav.

Atstumu tarp skirtingų taškų A ir B vadinamas atkarpos AB ilgis. Jei taškai A ir B sutampa, tai atstumas tarp jų laikomas lygiu nuliui.

Trikampio nelygybe vadinamas atstumų tarp trijų taškų sąryšis, nusakomas šia teorema:

7.5 teorema. ***Atstumas tarp dviejų taškų ne didesnis už sumą, gautą, sudėjus atstumus nuo tų taškų iki bet kurio trečio taško.***

Įrodymas. Sakykime, pažymėti trys taškai: A, B ir C. Jei du taškai arba visi trys taškai sutampa, tai teoremos teiginys savaime aiškus. Kai visi taškai yra skirtingi ir priklauso vienai tiesei, kuris nors taškas, pavyzdžiui B, yra tarp kitų dviejų. Tokiu atveju $AB+BC=AC$. Iš šios lygybės aišku, kad bet kuris iš tų atstumų ne didesnis už kitų dviejų atstumų sumą.

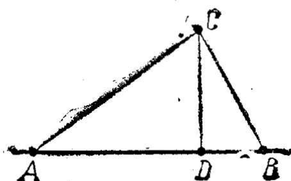
Dabar tarkime, kad tie trys taškai nepriklauso vienai tiesei (122 pav.). Įrodysime, kad šiuo atveju $AB<AC+BC$. Iš taško C nuleiskime statmenį CD į tiesę AB. Kadangi stačiojo trikampio statinis trumpesnis už įžambinę, tai $AD<AC$ ir $BD<BC$.

Jau įsitikinome, kad $AB\leqslant AD+BD$. Todėl $AB<AC+BC$. Teorema įrodyta.

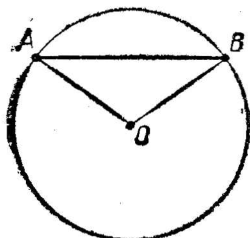
Atkreipkime dėmesį, kad tuo atveju, kai taškai nepriklauso vienai tiesei, trikampio nelygybė yra griežta nelygybė. Tai reiškia, kad *kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.*

Uždavinys (70). Įrodykite, kad bet kuri apskritimo styga nėra didesnė už skersmenį ir lygi skersmeniui tik tada, kai ji pati yra skersmuo.

Sprendimas (123 pav.). Remdamiesi trikampio nelygybe, gauname $AB\leqslant OA+OB=2R$. Kai centras O nepriklauso atkarpai AB, nelygybė yra griežta. Lygumo ženklą galima rašyti tik tuo atveju, kai styga eina per centrą, t. y. kai ji — skersmuo.



122 pav.



123 pav.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Pasakykite stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinuso apibrėžimą.
2. Įrodykite, kad kampo kosinusas priklauso tik nuo kampo laipsninio mato.
3. Įrodykite Pitagoro teoremą.
4. Įrodykite, kad stačiojo trikampio įžambinė didesnė už abu statinius.
5. Įrodykite, kad $\cos\alpha<1$, kai α — smailus kampas.
6. Įrodykite, kad, iš vieno taško išvedus statmenį ir pasvirąsias į tiesę, pasviroji bus didesnė už statmenį. Lygios pasvirosios turi lygias projekcijas, o iš dviejų pasvirųjų didesnė bus ta, kurios projekcija didesnė.
7. Pasakykite smailiojo kampo sinuso ir tangento apibrėžimus. Įrodykite, kad jie priklauso tik nuo kampo laipsninio mato.
8. Kaip stačiojo trikampio statinis išreiškiamas įžambine ir smailiuoju kampu, kaip išreiškiamas smailiuoju kampu ir kitu statiniu?
9. Paaiškinkite, kaip lentelėse randama nurodyto kampo sinuso reikšmė. Kaip lentelėse rasti nurodyto kampo kosinuso ir tangento reikšmes?
10. Paaiškinkite, kaip lentelėse randamas kampas, kai žinomas jo sinusas, kosinusas arba tangentas.
11. Įrodykite tapatybes: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.
12. Įrodykite, kad $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$, kai α — bet kuris smailus kampas.
13. Pasakykite 30°, 45° ir 60° kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.
14. Įrodykite, kad, smailiajam kampui α didėjant, $\sin\alpha$ ir $\mathrm{tg}\,\alpha$ didėja, o $\cos\alpha$ mažėja.
15. Įrodykite „trikampio nelygybę".
16. Įrodykite, kad kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.

PRATIMAI

1. Nubraižykite kampą, kurio kosinusas lygus $\frac{3}{5}$.
2. Nubraižykite kampą, kurio kosinusas lygus: 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0,5; 3) 0,8.
3. Dvi stačiojo trikampio kraštinės lygios 3 m ir 4 m. Apskaičiuokite trečią kraštinę. (Du sprendiniai.)

4. Raskite kraštinę rombo, kurio įstrižainės lygios: 1) 6 cm ir 8 cm; 2) 16 dm ir 30 dm; 3) 5 m ir 12 m.

5. Stačiakampio kraštinės lygios 60 cm ir 91 cm. Apskaičiuokite jo įstrižainės ilgį.

6. Kvadrato įstrižainė lygi a. Raskite jo kraštinės ilgį.

7. Apskrito geležies lakšto skersmuo lygus 1,4 m. Ar galima iš jo išpjauti kvadratą, kurio kraštinė lygi 1 m?

8. Stačiojo trikampio statinis lygus 5 m, o jo projekcija įžambinėje lygi 3 m. Apskaičiuokite įžambinę ir antrą statinį.

9. Raskite stačiojo trikampio statinius, kai jų projekcijos įžambinėje lygios: 1) 9 cm ir 16 cm; 2) 36 m ir 64 m.

10. Duotos atkarpos a ir b. Kaip nubraižyti atkarpas:

1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$?

11. Duotos atkarpos a ir b. Kaip nubraižyti atkarpą $c=\sqrt{ab}$?

12. Tarp dviejų fabriko pastatų įrengtas nuožulnus transporteris medžiagoms perkelti. Atstumas tarp pastatų lygus 10 m, o transporterio galai yra 8 m ir 4 m aukštyje nuo žemės. Apskaičiuokite transporterio ilgį.

13. Stačiakampio kraštinės lygios a ir b. Raskite apibrėžtinio apskritimo spindulį.

14. Į apskritimą įbrėžtas stačiakampis, kurio kraštinių santykis lygus 8 : 15. Apskaičiuokite tas kraštines, kai apskritimo spindulys lygus 34 cm.

15. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 17 cm, o pagrindas 16 cm. Apskaičiuokite aukštinę, nuleistą į pagrindą.

16. Apie lygiašonį trikampį, kurio pagrindas a, šoninė kraštinė b, apibrėžtas apskritimas. Raskite to apskritimo spindulį.

17. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a. Raskite jo aukštinę.

18. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs 10 cm ir 24 cm. Jos šoninė kraštinė lygi 25 cm. Apskaičiuokite trapecijos aukštinę.

19. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė, aukštinė ir vidurinė linija atitinkamai lygios 41 cm, 40 cm ir 45 cm. Apskaičiuokite trapecijos pagrindus.

20. Trikampio šoninės kraštinės lygios 30 cm ir 25 cm, o aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi 24 cm. Raskite pagrindą *.

21. Trikampio kraštinės lygios a, b ir c. Raskite to trikampio aukštinę, nuleistą į kraštinę c.

22. Trikampio šoninės kraštinės lygios 30 cm ir 25 cm. Apskaičiuokite to trikampio aukštinę, nuleistą į pagrindą, kuris lygus: 1) 25 cm; 2) 11 cm.

---

* Kartais bet kurio (nebūtinai lygiašonio) trikampio horizantali kraštinė vadinama pagrindu. Kitos dvi kraštinės tada vadinamos šoninėmis kraštinėmis.

23. Trikampio kraštinės lygios 13 cm, 14 cm ir 15 cm. Apskaičiuokite to trikampio aukštines.

24. Lygiašonio trikampio perimetras lygus 64 cm, o jo šoninė kraštinė 11 cm didesnė už pagrindą. Apskaičiuokite aukštinę, nuleistą į šoninę kraštinę.

25. 1) Iš taško B į tiesę a išvesta pasviroji. Įrodykite, kad iš taško B į tiesę a galima išvesti dar vieną to paties ilgio pasvirąją.
2) Ar galima iš taško, esančio šalia tiesės, išvesti tris vienodo ilgio pasvirąsias? Pagrįskite atsakymą.

26. Vienas stačiojo trikampio statinis lygus 8 cm. Prieš jį esančio kampo sinusas lygus 0,8. Apskaičiuokite įžambinę ir antrą statinį.

27. Lygiašonio trikampio pagrindas a, šoninė kraštinė b. Raskite įbrėžtinio apskritimo spindulį.

28. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 10 cm, šoninė kraštinė — 13 cm. Apskaičiuokite įbrėžtinio apskritimo spindulį r ir apibrėžtinio apskritimo spindulį R.

29. Stačiojo trikampio įžambinė lygi a, o vienas smailusis kampas α. Raskite antrą smailųjį kampą ir statinius.

30. Stačiojo trikampio statinis lygus a, o prieš jį esantis kampas α. Raskite antrą smailųjį kampą, prieš jį esantį statinį ir įžambinę.

31. Žinome stačiojo trikampio įžambinę c ir smailųjį kampą α. Raskite statinius, jų projekcijas įžambinėje ir aukštinę, nuleistą į įžambinę.

32. 1) Naudodamiesi lentelėmis, raskite $\sin 22°$, $\sin 22°36'$, $\sin 22°38'$, $\sin 22°41'$; $\cos 68°$, $\cos 68°18'$, $\cos 68°20'$, $\cos 68°23'$.
2) Raskite kampą x, kai $\sin x = 0{,}2840$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$.

33. Naudodamiesi lentelėmis, raskite sinuso ir kosinuso reikšmes, atitinkančias kampą: 1) 16°; 2) 24°36′; 3) 70°32′; 4) 88°49′.

34. Naudodamiesi lentelėmis, raskite smailųjį kampą x, kai: 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$.

35. Naudodamiesi lentelėmis, raskite tangento reikšmę, atitinkančią kampą: 1) 10°; 2) 40°40′; 3) 50°30′; 4) 70°15′.

36. Naudodamiesi lentelėmis, raskite smailų kampą x, kai: 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$.

37. Lygiašonio trikampio aukštinė lygi 12,4 m, o pagrindas 40,6 m. Raskite to trikampio kampus ir šoninę kraštinę.

38. Stačiojo trikampio statinių santykis lygus 19 : 28. Raskite jo kampus.

39. Stačiakampio kraštinės lygios 12,4 ir 26. Raskite kampą tarp įstrižainių.

40. Rombo įstrižainės lygios 4,73 ir 2,94. Raskite jo kampus.

41. Rombo kraštinė lygi 241 m, o aukštinė — 120 m. Raskite kampus.

42. Apskritimo spindulys lygus 5 m. Iš taško, kurio atstumas nuo centro lygus 13 m, išvestos apskritimo liestinės. Raskite liestinių ilgius ir kampą tarp jų.

43. Vertikalios karties aukštis lygus 7 m. Jos šešėlio ilgis lygus 4 m. Išreikškite laipsniais saulės aukštį virš horizonto.

44. Stačiojo lygiašonio trikampio pagrindas lygus a. Raskite jo šoninę kraštinę.

45. Apskaičiuokite stačiojo trikampio nežinomas kraštines ir smailiuosius kampus, kai žinomi:

1) du statiniai:

a) $a=3$, $b=4$; b) $a=9$, $b=40$;
c) $a=20$, $b=21$; d) $a=11$, $b=60$;

2) įžambinė ir statinis:

a) $c=13$, $a=5$; b) $c=25$, $a=7$;
c) $c=17$, $a=8$; d) $c=85$, $a=84$;

3) įžambinė ir smailusis kampas:

a) $c=2$, $\alpha=20°$; b) $c=4$, $\alpha=50°20'$;
c) $c=8$, $\alpha=70°36'$; d) $c=16$, $\alpha=76°21'$;

4) statinis ir prieš jį esantis kampas:

a) $a=3$, $\alpha=30°27'$; b) $a=5$, $\alpha=40°48'$;
c) $a=7$, $\alpha=60°35'$; d) $a=9$, $\alpha=68°$.

46. Suprastinkite šiuos reiškinius: 1) $1-\sin^2\alpha$;
2) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 3) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;
4) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$; 5) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$; 9) $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

47. Apskaičiuokite $\sin\alpha$ ir $\mathrm{tg}\,\alpha$ reikšmes, kai:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$.

48. Apskaičiuokite $\cos\alpha$ ir $\mathrm{tg}\,\alpha$ reikšmes, kai:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$.

49. Nubraižykite kampą α, kai: 1) $\cos\alpha=\frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha=\frac{4}{7}$;

3) $\sin\alpha=0{,}5$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{5}$; 5) $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}7$.

50. Stačiojo trikampio įžambinė lygi a, o smailusis kampas 60°. Raskite statinį, esantį prieš tą kampą.

51. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a. Raskite įbrėžtinio apskritimo spindulį r ir apibrėžtinio apskritimo spindulį R.

52. Trikampio didesnysis kampas prie pagrindo lygus 45°. Aukštinė dalija pagrindą į 20 cm ir 21 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite didesniąją šoninę kraštinę.

53. Viena trikampio kraštinė lygi 1 m. Kampai prie tos kraštinės lygūs 30° ir 45°. Apskaičiuokite kitas to trikampio kraštines.

54. Stačiakampio įstrižainė dukart ilgesnė už vieną jo kraštinę. Raskite kampus tarp įstrižainių.

55. Rombo įstrižainės lygios a ir $a\sqrt{3}$. Raskite to rombo kampus.

■. Katras kampas didesnis (α ar β), kai:

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=\frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha=0{,}75$, $\cos\beta=0{,}74$;

5) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta=2{,}5$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{2}$?

57. Stačiojo trikampio ABC kampas A didesnis už kampą B. Katras statinis didesnis: AC ar BC?

58. Stačiojo trikampio ABC statinis BC didesnis už statinį AC. Katras kampas didesnis: A ar B?

59. Lygiašonio trikampio kraštinės lygios 3 m ir 7 m. Kuri kraštinė yra pagrindas?

60. Įrodykite, kad atstumas tarp dviejų taškų, priklausančių trikampio kraštinėms, ne didesnis už didžiausiąją jo kraštinę.

61. Įrodykite, kad taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei, kai: 1) $AB=5$ m, $BC=7$ m, $AC=12$ m; 2) $AB=10{,}7$, $BC=17{,}1$, $AC=6{,}4$.

62. Lygiagretainio kraštinės lygios 4 cm ir 7 cm. Ar jo įstrižainė gali būti lygi 2 cm?

63. Dvi trikampio kraštinės lygios 1,9 m ir 0,7 m, o trečios kraštinės ilgis lygus sveikam metrų skaičiui. Raskite trečią jo kraštinę.

64. Įrodykite, kad trikampio ABC pusiaukraštinė, nubrėžta iš viršūnės A, mažesnė už kraštinių AB ir AC sumos pusę.

65. Įrodykite, kad trikampio aukštinių suma mažesnė už jo perimetrą.

■. Žinome, kad keturkampio įstrižainės susikerta. Įrodykite, kad jų ilgių suma mažesnė už to keturkampio perimetrą, bet didesnė už pusę perimetro.

67. Pažymėti keturi taškai: A, B, C ir D. Atkarpos AB ir CD susikerta. Raskite tokį tašką, kad atstumų nuo jo iki taškų A, B, C ir D suma būtų mažiausia.

68. Ar trikampio kraštinės gali būti proporcingos skaičiams 1, 2 ir 3?

69. Įrodykite, kad kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už pusę perimetro.

70. Įrodykite, kad bet kuri apskritimo styga nėra didesnė už skersmenį ir lygi skersmeniui tik tada, kai ji pati yra skersmuo.

71. Spindulio R apskritimo viduje yra taškas, kurio atstumas nuo centro lygus d. Raskite didžiausią ir mažiausią atstumą nuo šio taško iki apskritimo taškų.

72. Spindulio R apskritimo išorėje yra taškas, kurio atstumas nuo centro lygus d. Raskite didžiausią ir mažiausią atstumą nuo šio taško iki apskritimo taškų.

73. Dviejų apskritimų spinduliai lygūs 8 cm ir 11 cm, o atstumas tarp jų centrų 20 cm. Ar gali tie apskritimai susikirsti? Pagrįskite atsakymą.

74. Dviejų apskritimų spinduliai lygūs 6 cm ir 12 cm, o atstumas tarp jų centrų 5 cm. Ar gali tie apskritimai susikirsti? Pagrįskite atsakymą.

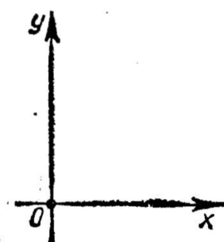
75. Įrodykite, kad 73 uždavinyje nurodytieji apskritimai yra vienas kito išorėje, o 74 uždavinyje nurodytasis 6 cm spindulio apskritimas yra 12 cm spindulio apskritimo viduje.

●. Apskritimų spinduliai lygūs R_1 ir R_2, o atstumas tarp jų centrų lygus d. Ar susikerta tie apskritimai, kai $R_1+R_2<d$?

§ 8. DEKARTINĖS KOORDINATĖS PLOKŠTUMOJE

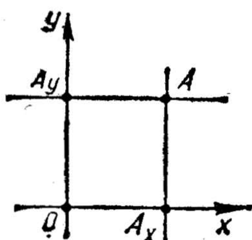
PLOKŠTUMOS KOORDINAČIŲ APIBRĖŽIMAS

Plokštumoje per tašką O nubrėšime dvi viena kitai statmenas tieses x ir y — *koordinačių ašis* (124 pav.). Tiesę x (dažniausiai ji horizontali) vadinsime *abscisių ašimi* (arba x ašimi), o tiesę y — *ordinačių ašimi* (arba y ašimi). Susikirtimo taškas O — *koordinačių pradžia* — abi ašis dalija į dvi pusašes. Vieną pusašę susitarsime vadinti *teigiama* (prie jos pridėsime rodyklę), o kitą — *neigiama*.

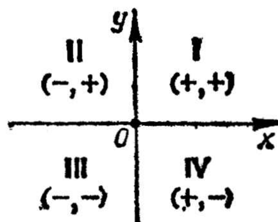


124 pav.

Kiekvienam plokštumos taškui A priskirsime du skaičius — *taško koordinates* — abscisę x ir ordinatę y.



125 pav.



126 pav.

Tam reikalui per tašką A nubrėšime tiesę, lygiagrečią ordinačių ašiai (125 pav.). Ji perkirs abscisių ašį kuriame nors taške A_x. Taško A *abscise* vadinsime skaičių x, kurio modulis lygus atstumui nuo taško O iki A_x. Tas skaičius bus teigiamas, kai A_x priklausys teigiamajai pusašei; jis bus neigiamas, kai A_x priklausys neigiamajai pusašei. Jei taškas A bus ordinačių ašyje, tai skaičių x laikysime lygiu nuliui.

Taško A ordinatė y apibrėžiama analogiškai. Per tašką A nubrėžiame tiesę, lygiagrečią abscisių ašiai (žr. 125 pav.). Ji kerta ordinačių ašį taške A_y. Taško A *ordinate* vadiname skaičių y, kurio modulis lygus atstumui nuo taško O iki A_y. Tas skaičius yra teigiamas, kai A_y priklauso teigiamajai pusašei; jis yra neigiamas, kai A_y priklauso neigiamajai pusašei. Jei taškas A yra abscisių ašyje, tai skaičių y laikome lygiu nuliui.

Taško koordinates rašysime skliaustuose po raidės, žyminčios tašką, pavyzdžiui: $A(x, y)$ (pirma rašome abscisę, paskui — ordinatę).

Koordinačių ašys dalija plokštumą į keturias dalis I, II, III ir IV (126 pav.), vadinamas *ketvirčiais*. Kiekviename ketvirtyje abi koordinatės nekeičia ženklo; koordinačių ženklai nurodyti brėžinyje.

Taškų, kurie priklauso x ašiai (abscisių ašiai), ordinatės lygios nuliui ($y=0$), o y ašiai priklausančių taškų abscisės lygios nuliui ($x=0$). Koordinačių pradžios taško abscisė ir ordinatė lygios nuliui.

Plokštumą, kurios taškams nurodytuoju būdu priskirtos koordinatės x ir y, vadinsime plokštuma xy. Tos plokštumos tašką, kuriam priskirtos koordinatės x ir y, kartais žymėsime tiesiog (x, y).

Apibrėžtosios taškų koordinatės x ir y vadinamos dekartinėmis, nes jas pirmasis savo veikaluose pritaikė prancūzų mokslininkas R. Dekartas (1596—1650).

U ž d a v i n y s (9). Įrodykite, kad atkarpa AB, jungianti taškus $A(-3, 2)$ ir $B(4, 1)$, kerta ordinačių ašį, bet nekerta abscisių ašies.

S p r e n d i m a s. Ordinačių ašis dalija plokštumą xy į dvi pusplokštumes. Vienos pusplokštumės taškų abscisės yra teigiamos, kitos — neigiamos. Kadangi taškų A ir B abscisės yra priešingų ženklų, tai taškai A ir B priklauso skirtingoms pusplokštumėms. Vadinasi, atkarpa AB kerta ordinačių ašį.

Abscisių ašis irgi dalija plokštumą xy į dvi pusplokštumes. Vienos pusplokštumės taškų ordinatės yra teigiamos, kitos — neigiamos. Kadangi taškų A ir B ordinatės yra teigiamos, tai taškai A ir B yra vienoje pusplokštumėje. Vadinasi, atkarpa AB nekerta abscisių ašies.

ATKARPOS VIDURIO KOORDINATĖS

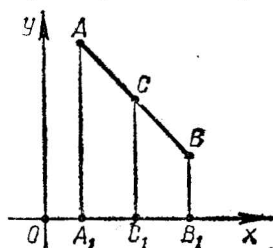
Sakykime, taškų $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ koordinatės yra žinomi skaičiai, o atkarpos AB vidurio $C(x, y)$ koordinatės nežinomos. *Rasime taško C koordinates x ir y.*

Tarkime, kad atkarpa AB nelygiagreti y ašiai, t. y. $x_1 \neq x_2$. Per taškus A, B ir C nubrėžiame tieses, lygiagrečias y ašiai (127 pav.). Jos kerta x ašį taškuose $A_1(x_1, 0)$, $B_1(x_2, 0)$ ir $C_1(x, 0)$. Remdamiesi Talio teorema, darome išvadą, kad taškas C_1 yra atkarpos A_1B_1 vidurys.

Kadangi taškas C_1 yra atkarpos A_1B_1 vidurys, tai $A_1C_1 = B_1C_1$. Todėl $|x-x_1| = |x-x_2|$. Iš to aišku, kad arba $x-x_1 = x-x_2$, arba $x-x_1 = -(x-x_2)$. Pirma lygybė negalima, nes $x_1 \neq x_2$. Todėl teisinga antra lygybė. Iš jos gauname formulę

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Jei $x_1 = x_2$, t. y. atkarpa AB lygiagreti y ašiai, tai taškų A_1, B_1 ir C_1 abscisės yra vienodos. Vadinasi, išvestoji formulė tinka ir šiam atvejui.



127 pav.

Taško C ordinatę randame analogiškai. Per taškus A, B ir C išvedame tieses, lygiagrečias x ašiai. Gauname formulę

$$y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

U ž d a v i n y s (17). Duotos lygiagretainio $ABCD$ viršūnės: $A(1, 0)$, $B(2, 3)$,

$C(3, 2)$. Raskite viršūnės D ir įstrižainių susikirtimo taško koordinates.

Sprendimas. Įstrižainių susikirtimo taškas yra abiejų įstrižainių vidurio taškas. Kadangi jis yra atkarpos AC vidurys, tai jo koordinatės yra

$$x=\frac{1+3}{2}=2,\ y=\frac{0+2}{2}=1.$$

Žinodami įstrižainių susikirtimo taško koordinates, galime rasti viršūnės D koordinates x ir y. Remdamiesi tuo, kad įstrižainių susikirtimo taškas yra atkarpos BD vidurys, rašome:

$$\frac{2+x}{2}=2,\ \frac{3+y}{2}=1.$$

Iš čia randame $x=2$, $y=-1$.

ATSTUMAS TARP TAŠKŲ

Plokštumoje xy duoti du taškai: $A_1(x_1, y_1)$ ir $A_2(x_2, y_2)$. *Atstumą tarp taškų A_1 ir A_2 išreikšime tų taškų koordinatėmis.*

Tarkime, kad $x_1 \neq x_2$ ir $y_1 \neq y_2$. Per taškus A_1 ir A_2 nubrėžiame tieses, lygiagrečias koordinačių ašims, ir jų susikirtimo tašką pažymime raide A (128 pav.). Atstumas tarp taškų A ir A_1 lygus $|y_1-y_2|$, o atstumas tarp taškų A ir A_2 lygus $|x_1-x_2|$. Jei atstumas tarp taškų A_1 ir A_2 lygus d, tai stačiajam trikampiui AA_1A_2 pritaikę Pitagoro teoremą, gauname

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2. \qquad (*)$$

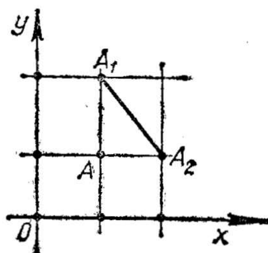
Nors atstumo taškų formulė (*) išvesta, tarus, kad $x_1 \neq x_2$ ir $y_1 \neq y_2$, bet ji tinka ir kitiems atvejams. Pavyzdžiui, jei $x_1=x_2$, $y_1 \neq y_2$, tai $d=|y_1-y_2|$. Tą patį rezultatą gauname ir iš formulės (*). Panašiai nagrinėjamas ir atvejis, kai $x_1 \neq x_2$, $y_1=y_2$. Jei $x_1=x_2$ ir $y_1=y_2$, tai taškai A_1 ir A_2 sutampa, o iš formulės (*) išplaukia $d=0$.

Uždavinys (27). Raskite x ašies tašką, vienodai nutolusį nuo taškų (1, 2) ir (2, 3).

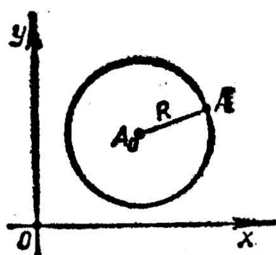
Sprendimas. Tarkime, kad ieškomasis taškas yra $(x, 0)$. Palyginę atstumus nuo šio taško iki duotųjų taškų, gauname

$$(x-1)^2+(0-2)^2=(x-2)^2+(0-3)^2.$$

Iš čia sužinome, kad $x=4$. Vadinasi, ieškomasis taškas yra (4, 0).



128 pav.



129 pav.

APSKRITIMO LYGTIS

Plokščios *figūros lygtimi* dekartinėse koordinatėse vadinama lygtis su dviem kintamaisiais x ir y, kurią tenkina bet kurio figūros taško koordinatės. Atvirkščiai, du bet kurie skaičiai, tenkinantys tą lygtį, yra figūros taško koordinatės.

Sudarysime apskritimo lygtį, kai jo centras yra taškas $A_0(a, b)$, o spindulys lygus R (129 pav.). Imkime bet kurį to apskritimo tašką $A(x, y)$. Atstumas nuo jo iki centro A_0 lygus R. Atstumo nuo taško A iki A_0 kvadratas lygus $(x-a)^2+(y-b)^2$. Vadinasi, apskritimo kiekvieno taško koordinatės x ir y tenkina lygtį

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (*)$$

Atvirkščiai, kiekvienas taškas A, kurio koordinatės tenkina lygtį (*), priklauso apskritimui, nes atstumas nuo jo iki taško A_0 lygus R. Iš to aišku, kad lygtis (*) iš tikrųjų yra lygtis apskritimo, kurio centras A_0, o spindulys lygus R.

Atkreipkime dėmesį, kad apskritimo lygtis, kai jo centras sutampa su koordinačių pradžia, yra tokia:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Uždavinys (33). Kada susikerta apskritimai, kurių spinduliai lygūs a ir b, o atstumas tarp centrų lygus c?

Sprendimas. Sakykime, O ir O_1 — tų apskritimų centrai. Tašką O laikysime dekartinės koordinačių sistemos pradžia, o pustiesę OO_1 — teigiamąja abscisių pusaše. Apskritimų lygtys bus tokios:

$$x^2+y^2=a^2, \quad (x-c)^2+y^2=b^2. \qquad (**)$$

Jei apskritimai susikerta, tai susikirtimo taško koordinatės tenkina abi lygtis (**). Atvirkščiai, jei lygčių sistema (**) turi sprendinį, t. y. egzistuoja x ir y reikšmės, tenkinančios abi lygtis, tai jos yra apskritimų susikirtimo taško koordinatės. Jei apskritimai susikerta, tai susikirtimo taškų skaičius lygus sistemos sprendinių skaičiui.

Spręsime lygčių sistemą (**). Tam reikalui iš pirmos lygties panariui atimsime antrąją. Gausime lygtį $2cx-c^2=a^2-b^2$, o iš

jos $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$. Šitą kintamojo x reikšmę įrašome į pirmą sistemos lygtį ir gauname

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2.$$

Iš čia

$$y^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2.$$

Dešiniąją gautosios lygybės pusę pertvarkome kaip kvadratų skirtumą:

$$\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)=$$
$$=\frac{1}{4c^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)=$$
$$=\frac{1}{4c^2}((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2)=$$
$$=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

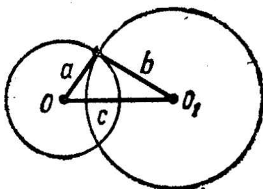
Vadinasi,

$$y^2=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

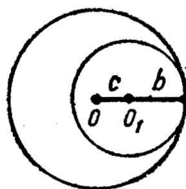
Jei $a+c>b$, $a+b>c$ ir $b+c>a$, tai dešinioji paskutinės lygybės pusė yra teigiama. Tokiu atveju sistema (**) turi du sprendinius. Apskritimai susikerta dviejuose taškuose (130 pav.).

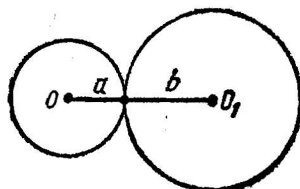
Jei bent vienas iš dauginamųjų $a+c-b$, $a+b-c$, $b+c-a$ lygus nuliui, tai sistema (**) turi vieną sprendinį. Apskritimai liečiasi (131 pav.).

Jei vienas dešinės pusės dauginamųjų yra neigiamas, tai sistema (**) neturi sprendinių; apskritimai nesusikerta (132 pav.). Du dauginamieji negali būti neigiami, nes jų suma turėtų būti

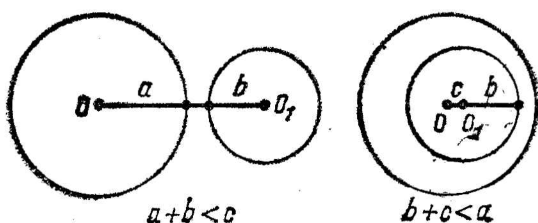


130 pav.





131 pav.



132 pav.

neigiama. Pavyzdžiui, jei $a+c-b<0$ ir $a+b-c<0$, tai suma $(a+c-b)+(a+b-c)=2a$ turi būti neigiama, o tai neįmanoma. Panašiai bus ir kitais atvejais.

Vadinasi, ***jei vienas iš skaičių a, b ir c yra didesnis už kitų dviejų skaičių sumą, tai apskritimai nesusikerta; jei vienas iš tų skaičių lygus kitų dviejų skaičių sumai, tai apskritimai liečiasi; jei kiekvienas iš tų skaičių yra mažesnis už kitų dviejų skaičių sumą, tai apskritimai susikerta dviejuose taškuose.***

TIESĖS LYGTIS

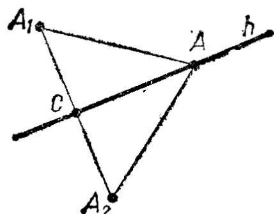
Įrodysime, kad ***kiekviena tiesė, nubrėžta dekartinėje koordinačių x, y sistemoje, reiškiama lygtimi***

$$ax+by+c=0. \qquad (*)$$

Sakykime, plokštumoje xy nubrėžta tiesė h. Nubrėšime bet kurią jai statmeną tiesę, kertančią tiesę h taške C. Toje tiesėje atidėsime lygias atkarpas CA_1 ir CA_2 (133 pav.).

Taško A_1 koordinates žymėsime a_1 ir b_1, o taško A_2 koordinates — a_2 ir b_2. Kiekvienas tiesės h taškas $A(x, y)$, kaip žinome, yra vienodai nutolęs nuo taškų A_1 ir A_2. Todėl šio taško koordinatės tenkina lygtį

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2. \qquad (**)$$



133 pav.

Atvirkščiai, jei kurio nors taško koordinatės x ir y tenkina lygtį (**), tai jis yra vienodai nutolęs nuo taškų A_1 ir A_2. Todėl jis priklauso tiesei h. Vadinasi, lygtis (**) yra tiesės h lygtis. Jei toje lygtyje atliksime nurodytuosius veiks-

mus ir visus narius perkelsime į kairiąją jos pusę, tai gausime lygtį

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2)=0,$$

kurios pavidalas sutampa su lygties (*) pavidalu. Teiginys įrodytas.

Uždavinys (47). Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus $A(-1, 1)$ ir $B(1, 0)$.

Sprendimas. Ieškomoji tiesės lygtis, kaip žinome, turi būti $ax+by+c=0$ pavidalo. Kadangi taškai A ir B priklauso tiesei, tai jų koordinatės tenkina tą lygtį. Įrašę taškų A ir B koordinates į tiesės lygtį, gauname

$$-a+b+c=0,\ a+c=0.$$

Iš tų lygybių du koeficientus, pavyzdžiui a ir b, galima išreikšti trečiu koeficientu: $a=-c$, $b=-2c$. Įrašę tas a ir b reikšmes į tiesės lygtį, gauname

$$-cx-2cy+c=0.$$

Visus lygties narius padaliję iš c, gauname lygtį

$$-x-2y+1=0.$$

Tai ir bus sąlygoje nurodytosios tiesės lygtis.

TIESĖS PADĖTIS KOORDINAČIŲ SISTEMOS ATŽVILGIU

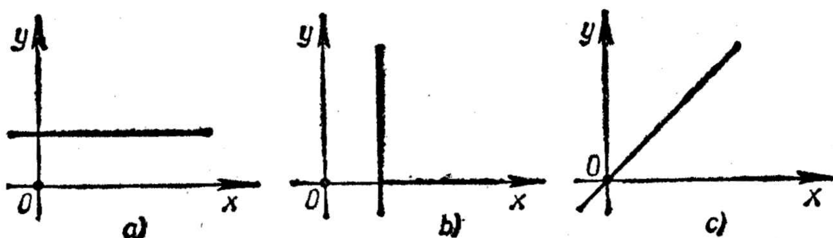
Išsiaiškinsime, kokia tiesės padėtis koordinačių ašių atžvilgiu, kai jos lygties $ax+by+c=0$ koeficientai įgyja kai kurias reikšmes.

1. $a=0$, $b\neq0$. Šiuo atveju tiesės lygtį galima parašyti šitaip:

$$y=-\frac{c}{b}.$$

Vadinasi, visų tiesės taškų ordinatės lygios $-\frac{c}{b}$. Todėl šiuo atveju ***tiesė bus lygiagreti x ašiai*** (134 pav., *a*). Atskiru atveju, kai $c=0$, tiesė sutaps su x ašimi.

2. $b=0$, $a\neq0$. Šis atvejis nagrinėjamas analogiškai. ***Tiesė lygiagreti y ašiai*** (134 pav., *b*). Kai $c=0$, tiesė sutampa su y ašimi.



134 pav.

3. $c=0$. *Tiesė eina per koordinačių pradžią,* nes koordinačių pradžios koordinatės (0, 0) tenkina tiesės lygtį (134 pav., *c*).

Jei tiesės bendrosios lygties $ax+by+c=0$ koeficientas prie y nelygus nuliui, tai lygtį galima išspręsti kintamojo y atžvilgiu:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Skaičius $-\frac{a}{b}$ ir $-\frac{c}{b}$ pažymėję raidėmis k ir q, gauname lygtį

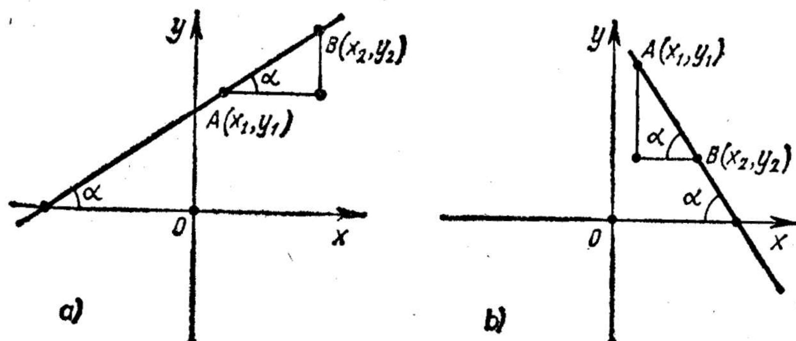
$$y=kx+q.$$

Išsiaiškinsime, kokią geometrinę prasmę turi šios lygties koeficientas k. Imkime du tiesės taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$. Jų koordinatės tenkina tiesės lygtį:

$$y_1=kx_1+q, \quad y_2=kx_2+q.$$

Iš antros lygybės panariui atėmę pirmąją, gauname: $y_2-y_1=$ $=k(x_2-x_1)$. Iš čia

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$



135 pav.

135 paveiksle pavaizduotu atveju *a*) gauname $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha$, o tame paveikslė pavaizduotu atveju *b*) gauname $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\operatorname{tg}\alpha$. Vadinasi, tiesės lygties koeficiento k modulis lygus smailiojo kampo, kurį tiesė sudaro su x ašimi, tangentui.

Tiesės lygties koeficientas k vadinamas *tiesės krypties koeficientu.*

TIESĖS IR APSKRITIMO SUSIKIRTIMAS

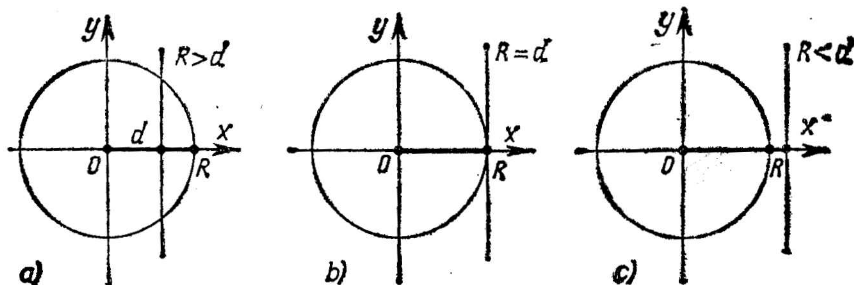
Išnagrinėsime tiesės ir apskritimo susikirtimą. Sakysime, R yra apskritimo spindulys, o d — atstumas nuo apskritimo centro iki tiesės. Apskritimo centrą laikysime koordinačių pradžia, o tiesę, statmeną nagrinėjamajai tiesei,— x ašimi (136 pav.). Tuomet apskritimo lygtis bus $x^2+y^2=R^2$, o tiesės lygtis $x=d$. Kad tiesė kirstų apskritimą, būtina jog dviejų lygčių sistema

$$x^2+y^2=R^2,\ x=d$$

turėtų sprendinį. Atvirkščiai, kiekvienas tos sistemos sprendinys nurodo tiesės ir apskritimo susikirtimo taško koordinates. Spręsdami sudarytąją sistemą, gauname:

$$x=d,\ y=\pm\sqrt{R^2-d^2}.$$

Iš kintamojo y išraiškos matyti, kad sistema turi du sprendinius, t. y. ***tiesė kerta apskritimą dviejuose taškuose, kai*** $R>d$ (136 pav., *a*). Kai $R=d$, sistema turi vieną sprendinį (***tiesė liečia apskritimą***; 136 pav., *b*). Sistema neturi sprendinių, t. y. ***tiesė nekerta apskritimo, kai*** $R<d$ (136 pav., *c*).



136 pav.

KAMPŲ NUO 0° IKI 180° SINUSO, KOSINUSO IR TANGENTO APIBRĖŽIMAS

Iki šiol buvo apibrėžtos tik smailiųjų kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmės. Dabar apibrėšime jų reikšmes, atitinkančias bet kokį kampą nuo 0° iki 180°. Tam reikalui imsime plokštumos *xy* apskritimą, kurio centras sutampa su koordinačių pradžia, o spindulys lygus *R* (137 pav.). Tarsime, kad spindulys *OA* su teigiamąja abscisių pusaše sudaro kampą α. Taško *A* koordinates žymėsime *x* ir *y*. Jei kampas α smailus, tai $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmes galima išreikšti taško *A* koordinatėmis, būtent:

$$\cos\alpha=\frac{x}{R},\quad \sin\alpha=\frac{y}{R},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

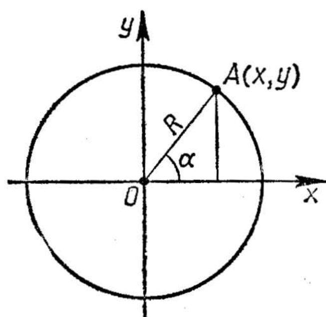
Dabar šiomis formulėmis apibrėšime $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmes, atitinkančias *bet kokį kampą* α. (Kai $\alpha=90°$, $\operatorname{tg}\alpha$ neturės reikšmės.) Laikydamiesi šio apibrėžimo, gausime: $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$, $\operatorname{tg} 180°=0$. Tardami, kad sutampantys spinduliai sudaro 0° kampą, gausime: $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\operatorname{tg} 0°=0$.

8.1 teorema. ***Jei*** α ***— bet kuris kampas,*** $0°<\alpha<180°$, ***tai*** $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. ***Jei, be to,*** $\alpha\neq 90°$, ***tai*** $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

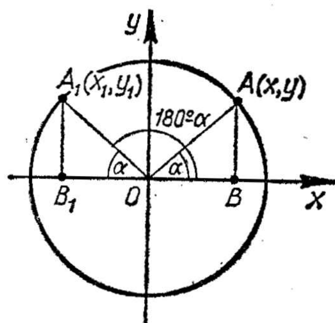
Įrodymas. Trikampiai *OAB* ir OA_1B_1 lygūs, nes jie turi lygias įžambines ir po lygų smailųjį kampą (138 pav.). Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $AB=A_1B_1$ ir $OB=OB_1$ t. y. $y=y_1$ ir $x=-x_1$. Todėl

$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y_1}{R}=\frac{y}{R}=\sin\alpha,$$

$$\cos(180°-\alpha)=\frac{x_1}{R}=\frac{-x}{R}=-\cos\alpha.$$



137 pav.



138 pav.

Lygybę $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ panariui padaliję iš lygybės $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, gauname $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. Teorema įrodyta.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, kaip apibrėžiamos taško koordinatės.
2. Kokios taško koordinatės: teigiamos ar neigiamos, kai taškas priklauso pirmajam (antrajam, trečiajam, ketvirtajam) ketvirčiui?
3. Kam lygios taškų, priklausančių ordinačių ašiai, abscisės? Kam lygios taškų, priklausančių abscisių ašiai, ordinatės? Kam lygios koordinačių pradžios koordinatės?
4. Išveskite atkarpos vidurio koordinačių formules.
5. Išveskite atstumo tarp dviejų taškų formulę.
6. Ką vadiname figūros lygtimi dekartinėse koordinatėse?
7. Išveskite apskritimo lygtį.
8. Įrodykite, kad tiesės, nubrėžtos dekartinėje koordinačių sistemoje, lygtis yra $ax+by+c=0$ pavidalo.
9. Nusakykite tiesės padėtį, kai jos lygties $ax+by+c=0$ koeficientas a lygus 0 ($b=0$, $c=0$).
10. Kokia tiesės lygties $y=kx+q$ koeficiento k geometrinė prasmė?
11. Kada tiesė ir apskritimas nesusikerta; kada susikerta dviejuose taškuose; kada liečiasi?
12. Pasakykite bet kokio kampo nuo 0° iki 180° sinuso, kosinuso ir tangento apibrėžimus.
13. Įrodykite, kad $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$, kai α — bet koks kampas, $0°<\alpha<180°$.

PRATIMAI

1. Nubrėžkite koordinačių ašis, ašyse pasirinkite ilgio vienetą, pažymėkite taškus, kurių koordinatės yra (1, 2), (−2, 1), (−1, −3), (2, −1).
2. Pažymėkite keturis atsitiktinius plokštumos xy taškus. Raskite tų taškų koordinates.
3. Tiesėje, lygiagrečioje x ašiai, pažymėti du taškai. Vieno taško ordinatė y lygi 2. Pasakykite kito taško ordinatę.
4. Tiesėje, statmenoje x ašiai, pažymėti du taškai. Vieno taško abscisė x lygi 3. Pasakykite kito taško abscisę.
5. Iš taško $A(2, 3)$ nuleistas statmuo į x ašį. Raskite statmens pagrindo koordinates.
6. Per tašką $A(2, 3)$ nubrėžta tiesė, lygiagreti x ašiai. Raskite tos tiesės ir y ašies susikirtimo taško koordinates.

7. Raskite plokštumos xy figūrą, kurios taškų abscisės x lygios 3.
8. Raskite plokštumos xy figūrą, kurios taškų abscisės x tenkina lygtį $|x|=3$.
9. Įrodykite, kad atkarpa AB, jungianti taškus $A(-3, 2)$ ir $B(4, 1)$, kerta ordinačių ašį, bet nekerta abscisių ašies.
10. Kurią y ašies pusašę (teigiamą ar neigiamą) kerta atkarpa AB, nurodyta 9 uždavinyje?
11. Apskaičiuokite atstumą nuo taško $(-3, 4)$ iki: 1) x ašies; 2) y ašies.
12. Apskaičiuokite atstumą nuo taško $(-3, 4)$ iki koordinačių pradžios.
13. Pirmo ketvirčio pusiaukampinėje pažymėtas taškas, kurio ordinatė y lygi 2. Kam lygi to taško abscisė?
14. Išspręskite 13 uždavinį, kai taškas yra antro ketvirčio pusiaukampinėje.
15. Raskite plokštumos xy figūrą, kurios taškų koordinatės tenkina lygtį $x=y$.
16. Raskite plokštumos xy figūrą, kurios taškų koordinatės tenkina lygtį $x=-y$.
17. Duotos lygiagretainio $ABCD$ viršūnės: $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$. Raskite viršūnės D ir įstrižainių susikirtimo taško koordinates.
18. Keturkampio $ABCD$ viršūnės yra taškai $A(-1, -2)$, $B(2, -5)$, $C(1, -2)$, $D(-2, 1)$. Įrodykite, kad tas keturkampis yra lygiagretainis. Raskite jo įstrižainių susikirtimo tašką.
19. Atkarpos galų koordinatės yra $(2, 0)$ ir $(0, 2)$. Raskite jos vidurio koordinates.
20. Atkarpos vienas galas $(1, 1)$, o jos vidurys $(2, 2)$. Raskite kitą tos atkarpos galą.
21. Keturkampio $ABCD$ viršūnės yra taškai $A(4, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 0)$, $D(1, -3)$. Įrodykite, kad tas keturkampis yra kvadratas.
22. Įrodykite, kad taškai $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ ir $(0, -1)$ yra kvadrato viršūnės.
23. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų: 1) $(1, 0)$ ir $(3, 0)$; 2) $(1, 0)$ ir $(-3, 0)$.
24. Įrodykite, kad atstumas tarp x ašies taškų $(x_1, 0)$ ir $(x_2, 0)$, kai x_1 ir x_2 — bet kurie skaičiai, apskaičiuojamas pagal formulę $d=|x_2-x_1|$.
25. Yra trys taškai: $A(4, -2)$, $B(1, 2)$, $C(-2, 6)$. Raskite visus tris atstumus tarp tų taškų.
26. Įrodykite, kad 25 uždavinyje nurodytieji taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Kuris taškas yra tarp kitų dviejų?
27. Raskite x ašies tašką, vienodai nutolusį nuo taškų $(1, 2)$ ir $(2, 3)$.
28. Raskite tašką, vienodai nutolusį nuo koordinačių ašių ir nuo taško $(3, 6)$.

29. Kurie iš taškų (1, 2), (3, 4), (−4, 3), (0, 5), (5, −1) priklauso apskritimui, išreiškiamam lygtimi $x^2+y^2=25$?

30. Apskritimas išreikštas lygtimi $x^2+y^2=169$. Raskite jo taškus, kurių: 1) abscisė lygi 5; 2) ordinatė lygi −12.

31. Apskritimo skersmuo yra atkarpa AB, jungianti taškus $A(2, 0)$ ir $B(-2, 6)$. Parašykite to apskritimo lygtį.

32. Apskritimas, kurio centras yra taškas $C(-4, 3)$, eina per tašką $A(-1, -1)$. Parašykite to apskritimo lygtį.

33. Kada susikerta apskritimai, kurių spinduliai lygūs a ir b, o atstumas tarp centrų lygus c?

34. Įrodykite, kad egzistuoja trikampis, kurio kraštinės lygios a, b ir c, kai kiekvienas iš skaičių a, b ir c yra mažesnis už kitų dviejų skaičių sumą.

35. Ar galima nubraižyti trikampį, kurio kraštinės lygios: 1) $a=1$ cm, $b=2$ cm, $c=3$ cm; 2) $a=2$ cm, $b=3$ cm, $c=4$ cm; 3) $a=3$ cm, $b=7$ cm, $c=11$ cm; 4) $a=4$ cm, $b=9$ cm, $c=5$ cm?

36. Apskritimas, kurio centras yra x ašyje, o spindulys lygus 5, eina per tašką (1, 4). Raskite to apskritimo centrą.

37. Raskite apskritimo $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ ir x ašies susikirtimo taškų koordinates.

38. Raskite apskritimų $x^2+y^2+8x-8y-8=0$ ir $x^2+y^2-8x+8y-8=0$ susikirtimo taškų koordinates.

39. Apskritimas, kurio centras yra taškas (1, 2), liečia x ašį. Parašykite to apskritimo lygtį.

40. Apskritimas, kurio centras yra taškas (−3, 4), eina per koordinačių pradžią. Parašykite to apskritimo lygtį.

41. Įrodykite, kad apskritimas $x^2+y^2+2ax+1=0$ nekerta y ašies.

42. Įrodykite, kad apskritimas $x^2+y^2+2ax=0$ liečia y ašį.

43. Geometrinę taškų vietą sudaro taškai, vienodai nutolę nuo taškų (0, 1) ir (1, 2). Parašykite jos lygtį.

44. Raskite tiesės ir koordinačių ašių susikirtimo taškus, kai tiesė pateikta lygtimi: 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y=12$; 3) $3x-2y+6=0$; 4) $4x-2y-10=0$.

45. Tiesės lygtis yra $3x+4y=1$. Raskite jos tašką, kurio abscisė lygi −1; tašką, kurio ordinatė lygi −2.

46. Raskite tiesių susikirtimo tašką, kai jų lygtys tokios:

1) $x+2y+3=0$, $4x+5y+6=0$;
2) $3x-y-2=0$, $2x+y-8=0$;
3) $4x+5y+8=0$, $4x-2y-6=0$.

47. Parašykite lygtį tiesės, einančios per taškus $A(-1, 1)$ ir $B(1, 0)$.

48. Parašykite lygtį tiesės, einančios per du taškus, kurių koordinatės yra: 1) (2, 3) ir (3, 2); 2) (4, −1) ir (−6, 2); 3) (5, −3) ir (−1, −2).

49. Raskite tiesės lygties $ax+by=1$ koeficientus a ir b, žinodami, kad ši tiesė eina per taškus (1, 2) ir (2, 1).

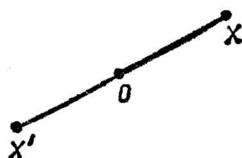
50. Tiesė eina per tašką (1, 2). Raskite jos lygties $x+y+c=0$ koeficientą c.
51. Kokia turi būti koeficiento c reikšmė, kad tiesė $x+y+c=0$ liestų apskritimą $x^2+y^2=1$?
52. Įrodykite, kad tiesės $x+2y=3$, $2x-y=1$ ir $3x+y=4$ susikerta viename taške.
53. Įrodykite, kad tiesės $x+2y=3$ ir $2x+4y=3$ nesusikerta.
54. Tiesė lygiagreti x ašiai ir eina per tašką (2, 3). Parašykite jos lygtį.
55. Tiesė eina per koordinačių pradžią ir tašką (2, 3). Parašykite jos lygtį.
56. Raskite 120°, 135° ir 150° kampų sinusą, kosinusą ir tangentą.
57. Naudodamiesi lentelėmis, raskite: 1) sin 160°; 2) cos 140°; 3) tg 130°.
58. Naudodamiesi lentelėmis, raskite nurodytųjų kampų sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes: 1) 40°; 2) 14°36′; 2) 70°20′; 4) 80°16′; 5) 145°; 6) 150°30′; 7) 150°33′; 8) 170°28′.
59. Naudodamiesi lentelėmis, raskite kampus, kai: 1) $\sin\alpha_1=0{,}2$; 2) $\cos\alpha_2=-0{,}7$; 3) $\operatorname{tg}\alpha_3=-0{,}4$.
60. Raskite $\sin\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmes, kai: 1) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha=-0{,}5$; 3) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
61. Raskite $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ reikšmes, kai: 1) $\sin\alpha=0{,}6$, $0°<\alpha<90°$; 2) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $90°<\alpha<180°$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $0°<\alpha<180°$.
62. Raskite $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$ reikšmes, kai $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$.
63. Nubraižykite kampą α, žinodami, kad $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.
64. Nubraižykite kampą α, žinodami, kad $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.
65. Įrodykite, kad iš lygybės $\cos\alpha=\cos\beta$ išplaukia $\alpha=\beta$.
66. Įrodykite, kad iš lygybės $\sin\alpha=\sin\beta$ išplaukia arba $\alpha=\beta$, arba $\alpha=180°-\beta$.

§ 9. FIGŪRŲ TRANSFORMACIJOS

FIGŪRŲ TRANSFORMACIJŲ PAVYZDŽIAI

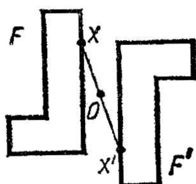
Jei kiekvieną duotos figūros tašką kokiu nors būdu perkelsime, tai gausime naują figūrą. Sakoma, kad naująją figūrą gavome, *transformuodami* duotąją. Pateiksime keletą pavyzdžių.

Simetrija taško atžvilgiu. Sakykime, O — fiksuotas taškas, o X — bet kuris plokštumos taškas (139 pav.). Atkarpos OX tęsinyje už taško O atidėkime atkarpą OX', lygią OX. Taškas X' vadinamas *simetrišku* taškui X taško O atžvilgiu. Taškas, simetriškas taškui O, yra pats taškas O. Savaime aišku, kad taškas, simetriškas taškui X', yra taškas X.



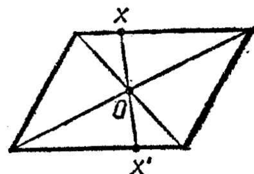
139 pav.

Figūros F transformaciją į figūrą F', kuri kiekvieną figūros F tašką X perveda į tašką X', simetrišką taško O atžvilgiu, vadiname *simetrija* (arba *simetrijos transformacija*) *taško O atžvilgiu.* Tokiu atveju figūros F ir F' vadinamos *simetriškomis* taško O atžvilgiu (140 pav.).



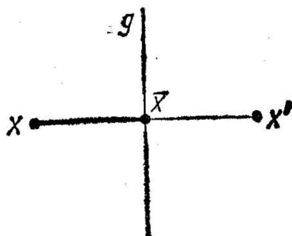
140 pav.

Jei simetrijos transformacija taško O atžvilgiu figūrą F perveda į ją pačią, tai figūra F vadinama *simetriška centro atžvilgiu*, o taškas O — *simetrijos centru.* Pavyzdžiui, lygiagretainis yra figūra, simetriška centro atžvilgiu. Jos simetrijos centras yra įstrižainių susikirtimo taškas (141 pav.).



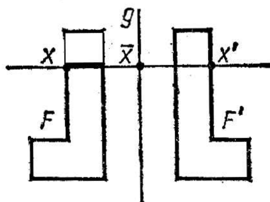
141 pav.

Simetrija tiesės atžvilgiu. Sakykime, g — fiksuota tiesė (142 pav.). Imame bet kurį tašką X. Iš jo nuleidžiame statmenį $X\bar{X}$ į tiesę g. To statmens tęsinyje už taško $\bar{X}$ atidedame atkarpą $\bar{X}X'$, lygią atkarpai $\bar{X}X$. Tašką X' vadiname *simetrišku* taškui X tiesės g atžvilgiu. Jei taškas X priklauso tiesei g, tai jam simetriškas bus pats taškas X. Savaime aišku, kad taškas, simetriškas taškui X', yra taškas X.

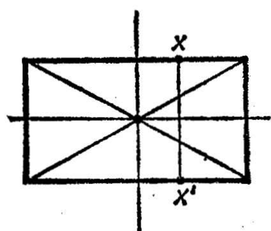


142 pav.

Figūros F transformaciją į figūrą F', kuri kiekvieną figūros F tašką X perveda į tašką X', simetrišką tiesės g atžvilgiu, vadiname *simetrija* (arba *simetrijos transformacija*) *tiesės g atžvilgiu.* Figūros F ir F' (143 pav.) vadinamos *simetriškomis* tiesės g atžvilgiu.

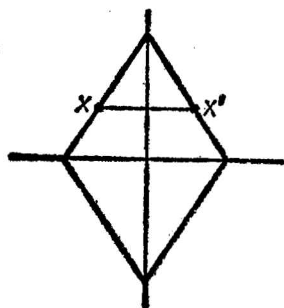


143 pav.



144 pav.

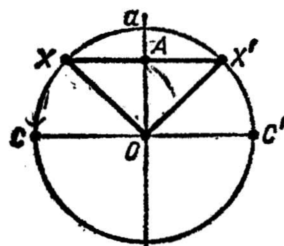
Jei simetrija tiesės *g* atžvilgiu figūrą *F* perveda į ją pačią, tai tą figūrą vadiname *simetriška tiesės g atžvilgiu*, o tiesę *g* — figūros *simetrijos ašimi*. Pavyzdžiui, tiesės, einančios per stačiakampio įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagrečios jo kraštinėms, yra stačiakampio simetrijos ašys (144 pav.). Tiesės, kuriose yra rombo įstrižainės, — rombo simetrijos ašys (145 pav.).



145 pav.

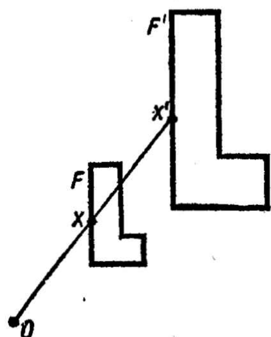
U ž d a v i n y s (6). Įrodykite, kad tiesė, einanti per apskritimo centrą, yra jo simetrijos ašis.

S p r e n d i m a s. Sakykime, tiesė *a* eina per apskritimo centrą *O* (146 pav.). Savaime aišku, kad simetrija tiesės *a* atžvilgiu tašką *C* perveda į tašką *C'*, o tašką *O* palieka vietoje. Imkime bet kurį apskritimo tašką *X* ir raskime tašką *X'* simetrišką taškui *X* tiesės *a* atžvilgiu.



146 pav.

Trikampiai *OAX* ir *OAX'* lygūs pagal pirmąjį požymį: jų kampai prie viršūnės *A* statūs, kraštinė *OA* bendra, o kraštinės *AX* ir *AX'* lygios, nes taškai *X* ir *X'* yra simetriški taško *A* atžvilgiu. Kadangi trikampiai lygūs, tai kraštinės *OX* ir *OX'* lygios. Todėl taškas *X'* priklauso apskritimui. Tai reiškia, kad apskritimas po simetrijos tiesės *a* atžvilgiu pereina į jį patį. Vadinasi, tiesė *a* yra apskritimo simetrijos ašis.



147 pav.

Homotetija. Sakykime, *F* — figūra, *O* — fiksuotas taškas (147 pav.). Per bet kurį figūros *F* tašką *X* nubrėžiame spindulį *OX* ir nuo jo atidedame atkarpą *OX'*, lygią $k \cdot OX$ (k — teigiamas skaičius). Figūros *F* transformaciją, kuria kiekvienam figūros *F* taškui nurodytu būdu pri-

skiriamas taškas X', vadiname *homotetija centro O atžvilgiu*. Skaičius k vadinamas *homotetijos koeficientu*. Figūros F ir F' vadinamos *homotetiškomis*.

JUDESYS

Judesiu vadiname figūros F transformaciją į figūrą F', nekeičiančią atstumo tarp taškų; bet kurie figūros F taškai X ir Y pereina į tokius figūros F' taškus X' ir Y', kad $XY=X'Y'$.

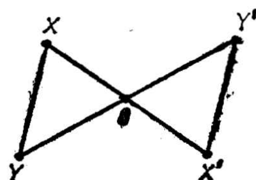
P a s t a b a. Judesio sąvoka geometrijoje susijusi su įprastu judėjimo vaizdiniu. Tačiau, kalbėdami apie judėjimą, įsivaizduojame nepertraukiamą (tolydų) procesą, tuo tarpu geometrijoje mums bus svarbios tik pradinė ir galinė figūros padėtys.

9.1 t e o r e m a. ***Simetrija taško atžvilgiu yra judesys.***

Į r o d y m a s. Imkime bet kuriuos figūros F taškus X ir Y (148 pav.). Simetrija taško O atžvilgiu juos perveda į taškus X' ir Y'. Išnagrinėkime trikampius XOY ir $X'OY'$. Tie trikampiai lygūs pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį: jų kampai prie viršūnės O lygūs kaip kryžminiai, $OX=OX'$ ir $OY=OY'$, nes taškai X ir X' bei Y ir Y' simetriški taško O atžvilgiu. Kadangi trikampiai lygūs, tai jų atitinkamos kraštinės lygios: $XY=X'Y'$. Vadinasi, simetrija taško O atžvilgiu yra judesys. Teorema įrodyta.

9.2 t e o r e m a. ***Simetrija tiesės atžvilgiu yra judesys.***

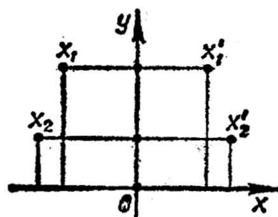
Į r o d y m a s. Tiesę laikykime dekartinės koordinačių sistemos y ašimi (149 pav.). Tarkime, kad figūros F taškas $X(x, y)$ pereina į figūros F' tašką $X'(x', y')$. Iš simetrijos tiesės atžvilgiu apibrėžimo aišku, kad taškų X ir X' ordinatės lygios, o abscisės skiriasi tik ženklu: $x'=-x$.



148 pav.

Bet kurie taškai $X_1(x_1, y_1)$ ir $X_2(x_2, y_2)$ pereina į taškus $X'_1(-x_1, y_1)$ ir $X'_2(-x_2, y_2)$. Todėl

$$X_1X_2^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$X_1'X_2'^2=(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$



149 pav.

Iš to aišku, kad $X_1X_2=X_1'X_2'$. Tai reiškia, kad simetrija tiesės atžvilgiu yra judesys. Teorema įrodyta.

Plokštumos posūkiu apie tašką vadiname judesį, kuriuo kiekvienas spindulys, išeinantis iš taško, pasukamas tuo pačiu

kampu ir ta pačia kryptimi. Figūros transformacija — jos pasukimas plokštumoje — irgi vadinama posūkiu (150 pav.).

150 pav.

Uždavinys (14). Nubraižykite lygiakraštį trikampį, kurio viena viršūnė yra duotas taškas, o kitos dvi viršūnės priklauso dviem duotosioms tiesėms.

Sprendimas. Tarkime, kad OAB yra ieškomasis trikampis: jo viršūnė O yra duotasis taškas, o viršūnės A ir B priklauso duotosioms tiesėms a ir b (151 pav.). Tiesę b pasukime 60° kampu apie tašką O. Tuomet tiesė b pereis į tiesę b', einančią per tašką A. Vadinasi, norint rasti viršūnę A, užtenka nubrėžti tiesę b'. Viršūnė A bus tiesių a ir b' susikirtimo taškas.

151 pav.

Norint nubrėžti tiesę b', užtenka pasirinkti du tiesės b taškus ir surasti taškus, į kuriuos jie pereina sukant. Tiesė b' eis per tuos taškus.

Radę viršūnę A, ieškome viršūnės B. Ji sutampa su atkarpos OA vidurio statmens ir tiesės b susikirtimo tašku. Sujungę atkarpomis taškus O, A ir B gauname ieškomąjį trikampį.

JUDESIO SAVYBĖS

9.3 teorema. ***Judesys tiesės taškus perveda į tiesės taškus, nekeisdamas jų tarpusavio padėties.***

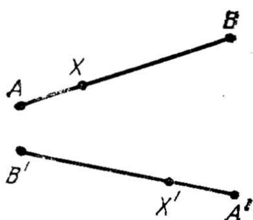
Tai reiškia, kad tiesės taškai A, B ir C pereina į taškus A_1, B_1 ir C_1, priklausančius vienai tiesei. Be to, jei taškas B yra tarp taškų A ir C, tai taškas B_1 bus tarp taškų A_1 ir C_1.

Įrodymas. Tarkime, kad taškas B yra tarp taškų A ir C. Jei taškai A_1, B_1 ir C_1 nėra vienoje tiesėje, tai jie — trikampio viršūnės. Tokiu atveju $A_1C_1<A_1B_1+B_1C_1$. Remdamiesi judesio apibrėžimu, iš čia gauname nelygybę $AC<AB+BC$, o pagal atkarpų matavimo savybę turi būti $AC=AB+BC$.

Iš gautos prieštaros aišku, kad pirmasis teoremos teiginys yra teisingas.

Dabar įsitikinsime, kad taškas B_1 yra tarp A_1 ir C_1. Tarkime, kad A_1 yra tarp B_1 ir C_1. Tuomet $A_1B_1+A_1C_1=B_1C_1$, o iš to išplaukia lygybė $AB+AC=BC$. Kadangi tai prieštarauja lygybei

$AB+BC=AC$, tai taškas A_1 negali būti tarp B_1 ir C_1. Panašiai įsitikiname, kad taškas C_1 negali būti tarp A_1 ir B_1. Vienas iš taškų A_1, B_1 ir C_1 turi būti tarp kitų dviejų. Tas taškas gali būti tik B_1. Teorema įrodyta.



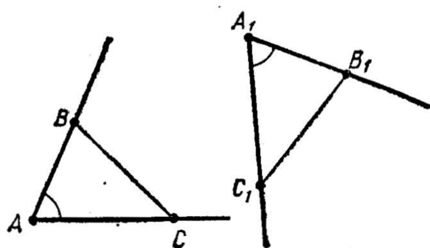
152 pav.

Iš 9.3 teoremos aišku, kad, ***judesys tieses perveda į tieses, pustieses — į pustieses, atkarpas — į atkarpas.***

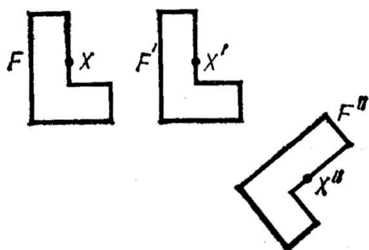
Aiškinsime tą išvadą, nagrinėdami atkarpos judesį. Sakykime, atkarpos AB galus A ir B judesys perveda į taškus A' ir B' (152 pav.). Įsitikinsime, kad atkarpa AB pereina į atkarpą $A'B'$. Pasirinkime bet kurį atkarpos AB tašką X. Jis pereina į tiesės $A'B'$ tašką X', esantį tarp taškų A' ir B' (9.3 teorema). Vadinasi, atkarpos AB taškas X pereina į atkarpos $A'B'$ tašką X'. Ar kiekvieną atkarpos $A'B'$ tašką X' atitinka atkarpos AB taškas X, kuris šiuo judesiu pervedamas į tašką X'? Taip, kiekvieną. Jei atkarpoje AB pažymėsime tašką X, kad būtų $AX=A'X'$, tai taškas X kaip tik pereis į tašką X'.

Nubrėžkime dvi pustieses AB ir AC, išeinančias iš taško A ir nesančias vienoje tiesėje (153 pav.). Judesiu šios pustiesės pervedamos į kurias nors pustieses A_1B_1 ir A_1C_1. Kadangi judesys atstumų nekeičia, tai trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs pagal trečiąjį trikampių lygumo požymį. Iš tų trikampių lygumo išplaukia kampų BAC ir $B_1A_1C_1$ lygumas. Vadinasi, ***judesys nekeičia kampų tarp pustiesių.***

Sakykime, vienu judesiu figūra F pervedama į figūrą F', o kitu judesiu figūra F' — į figūrą F'' (154 pav.). Tarkime, kad pirmuoju atveju figūros F taškas X pereina į figūros F' tašką X', o antruoju atveju figūros F' taškas X' pereina į figūros F'' tašką X''. Tuomet figūros F transformacija į figūrą F'', po kurios



153 pav.



154 pav.

figūros F taškas X pereina į figūros F'' tašką X'', nekeičia atstumo tarp taškų. Todėl ši transformacija irgi yra judesys. Šitą judesio savybę nusakome taip: ***du vienas po kito atliekami judesiai sudaro judesį.***

Sakykime, transformuojant figūrą F į figūrą F', skirtingi figūros F taškai pereina į skirtingus figūros F' taškus. Tarkime, kad figūros F taškas X, atliekant šią transformaciją, pereina į figūros F' tašką X'. Figūros F' transformacija į figūrą F, kai taškas X' pereina į tašką X, vadinama *atvirkštine* pradinei transformacijai.

Judesys nekeičia atstumo tarp taškų, todėl jis skirtingus taškus perveda į skirtingus taškus. Savaime aišku, kad ***judesiui atvirkštinė transformacija irgi yra judesys.***

FIGŪRŲ LYGUMAS

Lygiomis figūromis vadinamos figūros, kurios judesiu pervedamos viena į kitą.

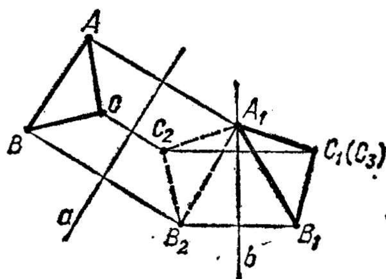
Figūrų lygumui žymėti vartojame lygumo ženklą. Užrašas $F=F'$ reiškia, kad figūra F lygi figūrai F'. Užrašant, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs ($\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$), susitarta viršūnes, kurios sutapdinamos judesiu, rašyti atitinkamose vietose. Laikantis tokios sąlygos, ši *trikampių lygumo sąvoka sutampa su iki šiol vartota sąvoka.* Įrodysime šį teiginį.

Tarkime, kad trikampis ABC judesiu sutapdinamas su trikampiu $A_1B_1C_1$, be to, viršūnė A pervedama į viršūnę A_1, viršūnė B — į viršūnę B_1, o C — į C_1. Kadangi judesys nekeičia atstumų ir kampų, tai $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=$ $=\angle B_1$ ir $\angle C=\angle C_1$. Vadinasi, tie trikampiai lygūs ankstesniojo apibrėžimo prasme.

Dabar tarkime, kad trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ lygios atitinkamos kraštinės ir atitinkami kampai: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=$ $=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. Įsitikinsime, kad tuos trikampius galima sutapdinti judesiu: viršūnę A sutapdinus su viršūne A_1, viršūnę B — su viršūne B_1, o C — su C_1.

Nubrėžiame tiesę a, statmeną atkarpai AA_1 ir einančią per jos vidurį (155 pav.). Trikampį ABC transformuojame simetrija tiesės a atžvilgiu. Gauname trikampį $A_1B_2C_2$. Nubrėžiame tiesę b, einančią per tašką A_1 ir atkarpos B_1B_2 vidurį. Trikampį $A_1B_2C_2$

transformuojame simetrija tiesės b atžvilgiu ir gauname trikampį $A_1B_1C_3$.



155 pav.

Jei taškai C_1 ir C_3 yra vienoje tiesės A_1B_1 pusėje, tai jie sutampa. Iš tikrųjų, kadangi kampai $A_1B_1C_1$ ir $B_1A_1C_3$ lygūs, tai spinduliai A_1C_1 ir A_1C_3 sutampa, o kadangi atkarpos A_1C_1 ir A_1C_3 lygios, tai taškai C_1 ir C_3 sutampa.

Vadinasi, trikampį ABC judesiu galima sutapdinti su trikampiu $A_1B_1C_1$.

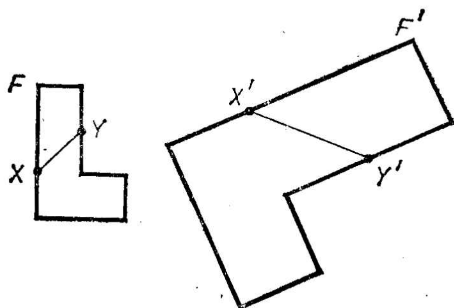
Jei taškai C_1 ir C_3 yra skirtingose tiesės A_1B_1 pusėse, tai dar reikia atlikti simetriją tiesės A_1B_1 atžvilgiu.

PANAŠUMO TRANSFORMACIJA IR JOS SAVYBĖS

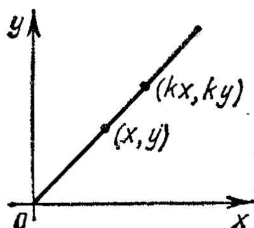
Panašumo transformacija vadiname figūros F transformaciją į figūrą F', kuri visus atstumus tarp taškų keičia (didina arba mažina) vienodą skaičių kartų (156 pav.). Tai reiškia, kad bet kurie figūros F taškai X ir Y, atlikus panašumo transformaciją, pereina į tokius figūros F' taškus X' ir Y', kad $X'Y'=k \cdot XY$, o skaičius k nepriklauso nuo taškų X ir Y. Skaičius k vadinamas *panašumo koeficientu*. Kai $k=1$, panašumo transformacija yra judesys.

9.4 teorema. ***Homotetija yra panašumo transformacija.***

Įrodymas. Sakykime, taškas O yra homotetijos centras, k — jos koeficientas (157 pav.). Sudarysime dekartinę koordina-



156 pav.



157 pav.

čių x ir y sistemą, kurios pradžia sutampa su tašku O. Išnagrinėsime transformaciją, kuri kiekvieną tašką (x, y) perveda į tašką (kx, ky). Įsitikinsime, kad ta transformacija yra homotetija.

Tarkime, kad $A(x_1, y_1)$ yra bet kuris figūros taškas. Jis pereina į tašką $A'(kx_1, ky_1)$. Tiesė OA eina per koordinačių pradžią, todėl jos lygtis yra $ax+by=0$. Ją tenkina taško A' koordinatės, nes $akx_1+bky_1=k(ax_1+by_1)=0$. Vadinasi, taškas A' priklauso tiesei OA. Be to, skaičiai x_1 ir kx_1, y_1 ir ky_1 yra vienodo ženklo, todėl A' priklauso spinduliui OA.

Kadangi $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $OA'=\sqrt{(kx_1)^2+(ky_1)^2}=k\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, tai $OA'=k\cdot OA$. Vadinasi, aptariamoji transformacija iš tikrųjų yra homotetija, kurios centras — taškas O, koeficientas lygus k.

Du taškai $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ pereina į taškus $A'(kx_1, ky_1)$ ir $B'(kx_2, ky_2)$. Todėl

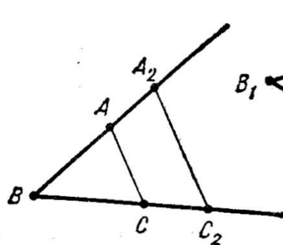
$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A'B'^2=(kx_2-kx_1)^2+(ky_2-ky_1)^2=$$
$$=k^2((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)=k^2\cdot AB^2.$$

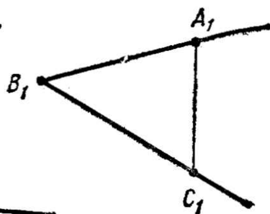
Iš to aišku, kad $A'B'=k\cdot AB$. Tai reiškia, kad aptariamoji transformacija yra panašumo transformacija. Teorema įrodyta.

Ne kiekviena panašumo transformacija yra homotetija. Jei figūrai F taikysime homotetiją, o po jos gautai figūrai F' — bet kurį judesį, tai galų gale gausime figūrą F''. Figūros F transformacija į figūrą F'', be abejo, bus panašumo transformacija, bet ne visada ji bus homotetija.

Analogiškai, kaip ir nagrinėjant judesio savybes, galima įrodyti, kad atlikus panašumo transformaciją, trys taškai A, B ir C, priklausantys vienai tiesei, pereis į tris taškus A_1, B_1 ir C_1, irgi priklausančius vienai tiesei. Be to, jei taškas B yra tarp taškų A ir C, tai B_1 bus tarp taškų A_1 ir C_1. Iš to darome išvadą: ***panašumo transformacija tieses perveda į tieses, pustieses — į pustieses, atkarpas — į atkarpas.***

Įrodysime, kad ***panašumo transformacija nekeičia kampų tarp pustiesių.*** Iš tikrųjų, tarkime, kad panašumo transformacija su koeficientu k kampą ABC perveda į kampą $A_1B_1C_1$ (158 pav.). Kampui ABC taikykime homotetiją, kurios centras yra kampo viršūnė B, o koeficientas lygus k. Tokiu atveju taškai A ir C pereis į taškus A_2 ir C_2. Trikampiai A_2BC_2 ir $A_1B_1C_1$ lygūs pagal trečiąjį požymį. Kadangi trikampiai lygūs, tai atitinkami jų kampai (A_2BC_2 ir $A_1B_1C_1$) lygūs. Vadinasi, kampas ABC lygus kampui $A_1B_1C_1$. Tai ir reikėjo įrodyti.





158 pav.

159 pav.

Uždavinys (36). Kampo viduje yra taškas A. Nubrėžkite apskritimą, kuris liečia kampo kraštines ir eina per tašką A.

Sprendimas. Brėžiame apskritimą, liečiantį kampo kraštines (159 pav.). Per kampo viršūnę ir tašką A nubrėžiame tiesę. Ši tiesė kerta nubrėžtą apskritimą taške B. Homotetija, kurios centras yra kampo viršūnė ir kuri tašką B perveda į tašką A, nubrėžtą apskritimą perveda į ieškomąjį apskritimą.

FIGŪRŲ PANAŠUMAS

Panašiomis figūromis vadinamos figūros, kurios panašumo transformacija pervedamos viena į kitą. Figūrų panašumui žymėti vartojamas specialus ženklas $\sim$. Užrašą $F \sim F'$ skaitome šitaip: „Figūra F panaši į figūrą F'“. Rašant, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ panašūs ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$), viršūnės, kurios sutapdinamos panašumo transformacija, rašomos atitinkamose vietose, t. y. A pereina į A_1, B — į B_1, C — į C_1.

Iš panašumo transformacijos savybių gauname išvadą: ***panašiųjų figūrų atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos atkarpos — proporcingos.*** Atskiru atveju, ***kai trikampis ABC panašus į trikampį $A_1B_1C_1$,***

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Trikampių panašumo požymius išreiškia ši teorema.

9.5 teorema. ***Du trikampiai yra panašūs:***

1) ***jei vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams;***

2) *jei vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms, o kampai tarp tų kraštinių lygūs;*

3) *jei vieno trikampio visos kraštinės proporcingos kito trikampio kraštinėms.*

Įrodymas. Tarkime, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ atitinka vieną iš trijų sąlygų: 1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; 3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Įrodysime, kad tie trikampiai panašūs.

Skaičių $\frac{AB}{A_1B_1}$ pažymėkime raide k. Trikampiui $A_1B_1C_1$ taikykime kokią nors panašumo transformaciją su panašumo koeficientu k, pavyzdžiui, homotetiją (160 pav.). Tuomet gausime trikampį $A_2B_2C_2$, lygų trikampiui ABC.

Iš tikrųjų, pirmuoju atveju

$$\angle A = \angle A_1 = \angle A_2, \quad \angle B = \angle B_1 = \angle B_2,$$
$$A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 = AB.$$

Trikampiai ABC ir $A_2B_2C_2$ lygūs pagal antrąjį trikampių lygumo požymį.

Antruoju atveju

$$\angle A = \angle A_2, \quad A_2B_2 = AB, \quad A_2C_2 = AC.$$

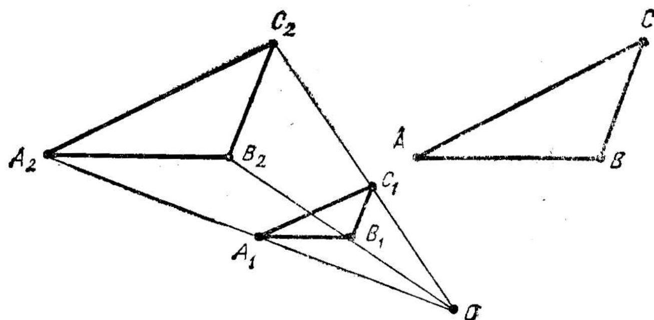
Trikampiai lygūs pagal pirmąjį trikampių lygumo požymį.

Trečiuoju atveju

$$A_2B_2 = AB, \quad B_2C_2 = BC, \quad A_2C_2 = AC.$$

Trikampiai lygūs pagal trečiąjį trikampių lygumo požymį.

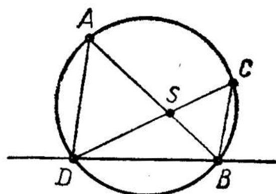
Kadangi trikampis $A_2B_2C_2$ lygus trikampiui ABC, tai trikampis $A_2B_2C_2$ pereina į trikampį ABC, atlikus judesį. Vadinasi, tri-



160 pav.

kampis $A_1B_1C_1$ pereina į trikampį ABC, atlikus paeiliui panašumo transformaciją ir judesį, o tai yra panašumo transformacija.

Trikampių panašumo požymiai įrodyti.



161 pav.

Uždavinys (37). Apskritimo stygos AB ir CD susikerta taške S. Įrodykite, kad $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

Sprendimas. Nubrėžkime tiesę BD (161 pav.). Taškai A ir C yra vienoje pusplokštumėje tiesės BD atžvilgiu, būtent, pusplokštumėje, kuriai priklauso taškas S.

Vadinasi, įbrėžtiniai kampai DCB ir DAB lygūs. Panašiai įsitikiname, kad įbrėžtiniai kampai ABC ir ADC taip pat lygūs. Kadangi nurodyti kampai lygūs, tai trikampiai ASD ir CSB yra panašūs (9.5 teorema). Remdamiesi trikampių panašumu, gauname proporciją

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

Iš čia išplaukia $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, kokie taškai vadinami simetriškais duoto taško atžvilgiu.
2. Kokią transformaciją vadiname simetrija taško atžvilgiu?
3. Kokia figūra vadinama simetriška centro atžvilgiu?
4. Ką vadiname figūros simetrijos centru? Pateikite figūros, simetriškos centro atžvilgiu, pavyzdį.
5. Kokius taškus vadiname simetriškais tiesės atžvilgiu?
6. Kokią transformaciją vadiname simetrija tiesės atžvilgiu?
7. Kokią figūrą vadiname simetriška tiesės atžvilgiu?
8. Ką vadiname figūros simetrijos ašimi? Pateikite pavyzdį.
9. Kokią transformaciją vadiname homotetija? Ką vadiname homotetijos centru, homotetijos koeficientu?
10. Kokią figūros transformaciją vadiname judesiu?
11. Įrodykite, kad simetrija taško atžvilgiu yra judesys.
12. Įrodykite, kad simetrija tiesės atžvilgiu yra judesys.
13. Paaiškinkite, ką vadiname posūkiu.
14. Įrodykite, kad tiesės taškai judesiu pervedami į tiesės taškus, nepakeitus tarpusavio padėties.
15. Į ką judesiu pervedamos tiesės, pustiesės ir atkarpos?
16. Įrodykite, kad judesys nekeičia kampų.

17. Kokios figūros vadinamos lygiomis?
18. Ką vadiname panašumo transformacija?
19. Įrodykite, kad homotetija yra panašumo transformacija.
20. Įrodykite, kad panašumo transformacija nekeičia kampų.
21. Kokios figūros vadinamos panašiomis?
22. Suformuluokite ir įrodykite trikampių panašumo požymius.

PRATIMAI

1. Raskite taškus, simetriškus taškams $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-3, 1)$, $D(-2, 2)$, $E(-3, -4)$, $F(2, -1)$ koordinačių pradžios atžvilgiu.
2. Raskite taškus, simetriškus dviem trikampio viršūnėms trečiosios viršūnės atžvilgiu.
3. Įrodykite, kad apskritimo centras yra jo simetrijos centras.
4. 1) Raskite taškus, simetriškus taškams $A(1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(0, -1)$ x ašies atžvilgiu.
   2) Raskite taškus, simetriškus taškams $D(2, 0)$, $E(-4, 1)$, $F(-2, -2)$ y ašies atžvilgiu.
5. Nubraižytas trikampis ABC. Skriestuvu raskite tašką C', simetrišką taškui C tiesės AB atžvilgiu.
6. Įrodykite, kad tiesė, einanti per apskritimo centrą, yra jo simetrijos ašis.
7. Raskite taškus, į kuriuos pereina taškai $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(-1, 1)$, $D(3, -1)$, atlikus homotetiją, kurios centras yra koordinačių pradžia, o koeficientas lygus: 1) 2; 2) 3.
8. Homotetija taškas X pervedamas į tašką X', o taškas Y — į tašką Y'. Raskite homotetijos centrą, kai taškai X, X', Y ir Y' nėra vienoje tiesėje.
9. Homotetija taškas X pervedamas į tašką X'. Raskite homotetijos centrą, kai k lygus: 1) 2; 2) 3; 3) 4.
10. Simetrija nežinomo taško atžvilgiu taškas X pervedamas į tašką X'. Skriestuvu ir liniuote raskite tašką, į kurį šia simetrija pervedamas taškas Y.
11. Simetrija nežinomos tiesės atžvilgiu taškas X pervedamas į tašką X'. Skriestuvu ir liniuote raskite tašką, į kurį šia simetrija pervedamas taškas Y.
12. Atstumas tarp dviejų bet kurių taškų, priklausančių pirmai figūrai, mažesnis už 10 cm, o atstumas tarp kai kurių taškų, priklausančių antrai figūrai, didesnis už 10 cm. Ar tos figūros gali būti simetriškos: 1) taško atžvilgiu; 2) tiesės atžvilgiu?
13. Nubraižykite figūrą, į kurią pervedamas trikampis ABC, pasukus jį $60°$ kampu apie viršūnę C: 1) pagal laikrodžio rodyklę; 2) prieš laikrodžio rodyklę.
14. Nubraižykite lygiakraštį trikampį, kurio viena viršūnė yra duotas taškas, o kitos dvi viršūnės priklauso dviem duotosioms tiesėms.

15. Ar trikampis gali turėti simetrijos centrą?
16. Įrodykite, kad keturkampis, kuris turi simetrijos centrą, yra lygiagretainis.
17. Įrodykite, kad tiesė, kurioje yra į pagrindą išvesta lygiašonio trikampio pusiaukraštinė, — to trikampio simetrijos ašis.
18. 1) Įrodykite: jei trikampis turi simetrijos ašį, tai ji eina per trikampio viršūnę.
2) Įrodykite: jei trikampis turi simetrijos ašį, tai jis yra lygiašonis.
3) Įrodykite: jei trikampis turi dvi simetrijos ašis, tai jis yra lygiakraštis.
19. Įrodykite, kad tiesė, kurioje yra kampo pusiaukampinė, — to kampo simetrijos ašis.
20. Nubrėžta atkarpa AB ir pažymėtas taškas O, nepriklausantis tiesei AB. Kokia figūra yra simetriška atkarpai AB taško O atžvilgiu? Nubraižykite tą figūrą.
21. Nubrėžta tiesė a ir pažymėtas jai nepriklausantis taškas O. Kokia figūra yra simetriška tiesei a taško O atžvilgiu? Nubraižykite ją.
22. Kiek simetrijos centrų turi figūra, sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių? Kur jie yra?
23. Kiek simetrijos ašių turi lygiakraštis trikampis?
24. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas yra jo simetrijos centras.
25. Kiek simetrijos ašių turi atkarpa?
26. Kiek simetrijos ašių turi tiesė?
27. Įrodykite, kad tiesės, einančios per kvadrato įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagrečios kvadrato kraštinėms, yra jo simetrijos ašys.
28. Įrodykite, kad rombo įstrižainės yra jo simetrijos ašys.
29. 1) Nubrėžtos dvi susikertančios tiesės ir nurodytas joms nepriklausantis taškas. Nubrėžkite atkarpą, kurios galai priklauso toms tiesėms, o vidurys sutampa su duotu tašku.
2) Nubrėžtos trys tiesės a, b ir c, kurių kiekviena kerta kitas dvi. Nubrėžkite statmeną tiesei b atkarpą, kurios vidurys yra tiesėje b, o galai — tiesėse a ir c.
30. Įrodykite, kad vienodo ilgio atkarpos sutapdinamos judesiu ir kad vienodo laipsninio mato kampai sutapdinami judesiu.
31. Lygiagretainiai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ yra tokie, kad $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ ir $\angle A=\angle A_1$. Įrodykite, kad tie lygiagretainiai lygūs, t. y. sutapdinami judesiu.
32. Įrodykite, kad rombai, kurie turi lygias įstrižaines, yra lygūs.
33. Įrodykite, kad du vienodo spindulio apskritimai yra lygūs, t. y. sutapdinami judesiu.
34. Įrodykite, kad figūra, panaši į apskritimą, yra apskritimas.
35. Raskite geometrinę vietą taškų, kurie stygas, išvestas iš vieno taško, priklausančio apskritimui, dalija santykiu $m:n$.

36. Kampo viduje yra taškas A. Nubrėžkite apskritimą, kuris liečia kampo kraštines ir eina per tašką A.
37. Apskritimo stygos AB ir CD susikerta taške S. Įrodykite, kad $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.
38. Į duotą trikampį įbrėžkite kvadratą, kurio dvi viršūnės priklauso nurodytai kraštinei.
39. Trikampio kraštinės sutinka kaip $4:5:6$. Raskite kraštines panašaus į jį trikampio, kurio mažiausioji kraštinė lygi 0,8 m.
40. Trikampio kraštinės sutinka kaip $2:5:4$. Raskite kraštines panašaus į jį trikampio, kurio perimetras lygus 55 m.
41. Lygiašonių trikampių kampai prie viršūnės, esančios prieš pagrindą, yra lygūs. Įrodykite, kad tokie trikampiai yra panašūs.
42. Dviejų lygiašonių trikampių kampai tarp šoninių kraštinių lygūs. Vieno trikampio šoninė kraštinė ir pagrindas atitinkamai lygūs 17 cm ir 10 cm. Kito trikampio pagrindas lygus 8 cm. Raskite jo šoninę kraštinę.
43. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra tokie, kad $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ m, $BC = 7$ m, $A_1B_1 = 10$ m, $A_1C_1 = 8$ m. Raskite kitas šių trikampių kraštines.
44. Išspręskite 43 uždavinį, kai $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm, $A_1B_1 = 12$ cm, $AC - A_1C_1 = 6$ cm.
45. Įrodykite, kad stačiojo trikampio aukštinė, išvesta iš stačiojo kampo viršūnės, jį dalija į du trikampius, panašius į pradinį.
46. Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista į įžambinę, ją dalija į 9 cm ir 16 cm atkarpas. Apskaičiuokite to trikampio kraštines.
47. Stačiojo trikampio įžambinė lygi 25 cm, o vienas statinis lygus 10 cm. Raskite kito statinio projekciją įžambinėje.
48. Nubrėžtos panašių trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ aukštinės BD ir B_1D_1. Įrodykite, kad $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.
49. Trikampio pagrindas lygus a, o aukštinė lygi h. Į jį įbrėžtas kvadratas, kurio dvi viršūnės priklauso trikampio pagrindui, o kitos dvi — šoninėms kraštinėms. Raskite kvadrato kraštinę.
50. Trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ kampai B ir B_1 lygūs. Trikampio ABC kraštinės, sudarančios kampą B, yra 2,5 karto ilgesnės už atitinkamas trikampio $A_1B_1C_1$ kraštines. Raskite AC ir A_1C_1, kai jų suma lygi 4,2 m.
51. Trikampio ABC kraštinės AB ir AC atitinkamai lygios 15 m ir 20 m. Nuo kraštinės AB nukirsta atkarpa $AD = 8$ m, o nuo kraštinės AC — atkarpa $AE = 6$ m. Ar panašūs šie trikampiai: 1) ABC ir ADE; 2) ABC ir AED?
52. Išspręskite 51 uždavinį, kai $AD = 9$ m, $AE = 12$ m.
53. Ar panašūs du statieji trikampiai, kai vienas pirmo trikampio kampas lygus $40°$, o vienas antro trikampio kampas lygus: 1) $50°$; 2) $60°$?

54. Trikampio ABC kraštinei AB lygiagreti tiesė kraštinę AC kerta taške P, o kraštinę BC — taške Q. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir PQC yra panašūs.

55. Trikampio ABC kraštinei AB lygiagreti tiesė dalija kraštinę AC santykiu $m:n$, skaitant nuo viršūnės C. Kokiu santykiu ji dalija kraštinę BC?

56. Trikampyje ABC nubrėžta atkarpa DE, lygiagreti kraštinei AC (atkarpos galas D yra kraštinėje AB, o E — kraštinėje BC). Apskaičiuokite AD, kai $AB=16$ cm, $AC=20$ cm, $DE=15$ cm.

57. Raskite 56 uždavinio santykį $AD:BD$, kai $AC:DE=55:28$.

58. Apskaičiuokite 56 uždavinyje nurodytos atkarpos DE ilgį, kai:

1) $AC=20$ cm, $AB=17$ cm, $BD=11{,}9$ cm;
2) $AC=18$ dm, $AB=15$ dm, $AD=10$ dm.

59. Duotos atkarpos a, b ir c. Nubrėžkite atkarpą $x=\frac{ac}{b}$.

60. Ar panašūs du lygiakraščiai trikampiai?

61. Ar panašūs trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$, kai:
1) $AB=1$ m, $AC=1{,}5$ m, $BC=2$ m; $A_1B_1=10$ cm, $A_1C_1=15$ cm, $B_1C_1=20$ cm;
2) $AB=1$ m, $AC=2$ m, $BC=1{,}5$ m; $A_1B_1=8$ dm, $A_1C_1=16$ dm, $B_1C_1=12$ dm;
3) $AB=1$ m, $AC=2$ m, $BC=1{,}25$ m; $A_1B_1=10$ cm, $A_1C_1=20$ cm, $B_1C_1=13$ cm?

62. Trikampio kraštinės lygios 0,8 m, 1,6 m ir 2 m. Panašaus į jį trikampio perimetras lygus 5,5 m. Apskaičiuokite šio trikampio kraštines.

63. Yra du panašūs trikampiai. Pirmo trikampio perimetras sudaro $\frac{11}{13}$ antro trikampio perimetro. Dviejų atitinkamų kraštinių skirtumas lygus 1 m. Raskite šias kraštines.

64. Fabriko kaminas meta 35,8 m ilgio šešėlį, o vertikalus 1,9 m baslys — 1,62 m šešėlį. Apskaičiuokite kamino aukštį.

65. Duotas trikampis. Nubraižykite į jį panašų trikampį, kai duotas perimetras.

66. Trikampis ABC ir rombas $ADEF$ turi bendrą kampą A. Rombo viršūnė E yra kraštinėje BC. Apskaičiuokite rombo kraštinę, kai $AB=c$, $AC=b$.

67. Trapecijos pagrindų santykis lygus $m:n$. Jos įstrižainė dalija kitą įstrižainę į dvi atkarpas. Raskite tų atkarpų santykį.

68. Tiesė, nubrėžta per trapecijos įstrižainių susikirtimo tašką, dalija vieną pagrindą santykiu $m:n$. Kokiu santykiu ji dalija kitą pagrindą?

69. Trapecijos $ABCD$ pagrindai BC ir AD atitinkamai lygūs 12 m ir 27 m. Nubrėžus įstrižainę AC, gauti lygūs kampai ABC ir ACD. Apskaičiuokite įstrižainės AC ilgį.

70. Trapecijos pagrindams lygiagreti tiesė dalija vieną šoninę kraštinę santykiu $m:n$. Kokiu santykiu ji dalija kitą šoninę kraštinę?

71. Trapecijos $ABCD$ šoninių kraštinių AB ir CD tęsiniai susikerta taške E. Raskite trikampio AED kraštines, kai $AB=5$ cm, $BC=10$ cm, $CD=6$ cm, $AD=15$ cm.

72. Raskite 71 uždavinyje nurodyto trikampio AED aukštinę, kai $BC=7$ cm, $AD=21$ cm, o trapecijos aukštinė lygi 3 cm.

73. Lygiašonio trikampio ABC pagrindas yra aukštinė AC. Kampas prieš pagrindą lygus 36°. Nubrėžta pusiaukampinė AD. 1) Įrodykite, kad trikampis ABC panašus į trikampį CAD. 2) Raskite trikampio ABC pagrindą, kai jo šoninė kraštinė lygi a.

74. Keturkampio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške M. Įrodykite, kad apie tą keturkampį galima apibrėžti apskritimą, jei $AM \cdot CM = BM \cdot DM$.

75. Iš taško A, esančio šalia apskritimo, nubrėžtos dvi kirstinės, kurios apskritimą kerta taškuose B_1 ir C_1, B_2 ir C_2 (B_1 yra tarp A ir C_1, B_2 — tarp A ir C_2). 1) Įrodykite, kad trikampis AB_1C_2 panašus į trikampį AB_2C_1. 2) Įrodykite, kad $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.

76. Iš taško M išvesta kirstinė, kertanti apskritimą taškuose A ir B, ir liestinė, liečianti apskritimą taške C. Įrodykite, kad liestinės atkarpos kvadratas lygus kirstinės atkarpų sandaugai: $MC^2 = MA \cdot MB$.

77. Lėktuvas skrenda 4 km aukštyje. Žemės spindulys lygus 6 370 km. Kokio ilgio spinduliu lakūnas mato Žemę?

78. Ostankino televizijos bokšto aukštis lygus 533 m. Apskaičiuokite iš bokšto matomo horizonto spindulį.

§ 10. PLOKŠTUMOS VEKTORIAI

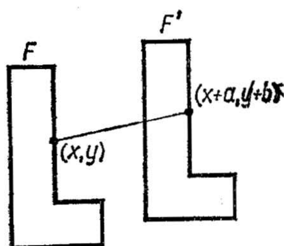
LYGIAGRETUSIS POSTŪMIS

Plokštumoje sudarykime dekartinę koordinačių x ir y sistemą. Figūros F transformacija, kuri kiekvieną figūros tašką (x, y) perveda į tašką $(x+a, y+b)$, a ir b — konstantos, vadinama *lygiagrečiuoju postūmiu* (162 pav.). Lygiagretusis postūmis nusakomas formulėmis

$$x' = x + a, \quad y' = y + b. \qquad (*)$$

Iš jų randame taško, į kurį pereina lygiagrečiai pastumtas taškas (x, y), koordinates x' ir y'.

Lygiagretusis postūmis yra judesys. Iš tikrųjų, jei taškai $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ pereina į taškus $A'(x_1+a, y_1+b)$ ir $B'(x_2+a, y_2+b)$, tai

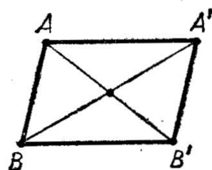


162 pav.

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A'B'^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Todėl $AB=A'B'$. Vadinasi, ši transformacija nekeičia atstumų, o tai reiškia, kad ji yra judesys.

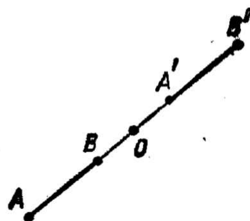
Terminas „lygiagretusis postūmis" paaiškinamas tuo, kad, atliekant šią transformaciją, *taškai pasislenka lygiagrečiomis (arba sutampančiomis) tiesėmis vienodu atstumu.* Iš tikrųjų, jei taškai $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ pereina į taškus $A'(x_1+a, y_1+b)$ ir $B'(x_2+a, y_2+b)$ (163 pav.), tai atkarpos AB' vidurio koordinatės yra



163 pav.

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

Tas pačias koordinates turi ir atkarpos $A'B$ vidurys. Iš to aišku, kad keturkampio $AA'B'B$ įstrižainės susikerta ir kad susikirtimo taškas jas dalija pusiau. Todėl šis keturkampis yra lygiagretainis. Lygiagretainio priešingosios kraštinės AA' ir BB' yra lygios ir lygiagrečios.

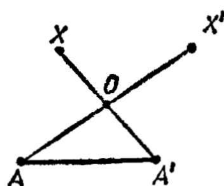


164 pav.

Lygiagretainio $AA'B'B$ kitos dvi priešingosios kraštinės AB ir $A'B'$ taip pat lygiagrečios. Iš to aišku, kad *lygiagrečiuoju postūmiu tiesė pervedama į jai lygiagrečią tiesę (arba į tą pačią tiesę).*

P a s t a b a. Paskutinis teiginys buvo įrodytas, tarus, kad taškas B nėra tiesėje AA'. Tuo atveju, kai taškas B yra tiesėje AA', taškas B' irgi priklauso tai tiesei, nes atkarpos AB' vidurys sutampa su atkarpos BA' viduriu (164 pav.). Vadinasi, taškai A, B, A' ir B' yra vienoje tiesėje. Be to,

$$AA'=\sqrt{(x_1+a-x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$



165 pav.

Vadinasi, šiuo atveju taškai A ir B pasislenka tiese AB vienodu atstumu $\sqrt{a^2+b^2}$, o tiesė AB pereina į ją pačią.

10.1 teorema. ***Kad ir kokie būtų taškai A ir A', yra vienintelis lygiagretusis postūmis, kuris tašką perveda į tašką A'.***

Įrodymas. Pirmiausia įsitikinsime, kad toks lygiagretusis postūmis yra vienintelis. Sakykime, X — bet kuris figūros taškas, o X' — taškas, į kurį jis pereina po lygiagrečiojo postūmio (165 pav.). Jau įsitikinome, kad atkarpos XA' ir AX' turi bendrą vidurį O. Tašką X vienareikšmiškai atitinka taškas O — atkarpos $A'X$ vidurys, o taškus A ir O vienareikšmiškai atitinka taškas X', nes O yra atkarpos AX' vidurys. Kadangi tašką X atitinka vienintelis X', tai lygiagretusis postūmis yra vienintelis.

Įsitikinsime, kad yra lygiagretusis postūmis, kuris tašką A perveda į tašką A'. Jei a_1 ir a_2 yra taško A koordinatės, o a'_1 ir a'_2 — taško A' koordinatės, tai lygiagretusis postūmis, reiškiamas formulėmis

$$x'=x+a_1'-a_1,\quad y'=y+a_2'-a_2,$$

tašką A perveda į tašką A'. Iš tikrųjų, jei $x=a_1$, $y=a_2$, tai iš formulių gauname $x'=a_1'$, $y'=a_2'$. Teorema įrodyta.

Uždavinys (3). Lygiagrečiuoju postūmiu taškas (1, 1) pervedamas į tašką (−1, 0). Į kurį tašką pereina koordinačių pradžia?

Sprendimas. Kiekvieną lygiagretųjį postūmį reiškiame formulėmis $x'=x+a$, $y'=y+b$. Kadangi taškas (1, 1) pereina į tašką (−1, 0), tai $-1=1+a$, $0=1+b$. Todėl $a=-2$, $b=-1$. Vadinasi, lygiagretusis postūmis, tašką (1, 1) pervedąs į tašką (−1, 0), reiškiamas formulėmis $x'=x-2$, $y'=y-1$. Į šias formules įrašę koordinačių pradžios koordinates ($x=0$, $y=0$), gausime $x'=-2$, $y'=-1$. Vadinasi, koordinačių pradžia pereina į tašką (−2, −1).

10.2 teorema. ***Transformacija, atvirkštinė lygiagrečiajam postūmiui, yra lygiagretusis postūmis. Du lygiagretieji postūmiai, atlikti vienas po kito, sudaro lygiagretųjį postūmį.***

Įrodymas. Kiekvienas lygiagretusis postūmis nusakomas

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

pavidalo formulėmis. Atvirkštinė transformacija išreiškiama to paties tipo formulėmis:

$$x=x'-a, \quad y=y'-b.$$

Todėl atvirkštinė transformacija yra lygiagretusis postūmis. Pirmasis teiginys įrodytas.

Sakykime, yra du lygiagretieji postūmiai, reiškiami formulėmis:

$$x'=x+a, \quad y'=y+b;$$
$$x''=x'+c, \quad y''=y'+d.$$

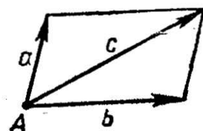
Transformacija, kurią gauname, paeiliui atlikę tuos lygiagrečiuosius postūmius, išreiškiama formulėmis

$$x''=x+a+c, \quad y''=y+b+d.$$

Ta transformacija yra lygiagretusis postūmis. Teorema įrodyta.

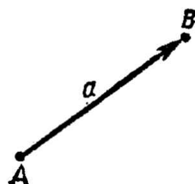
VEKTORIAUS SĄVOKA

Kai kurie fizikiniai dydžiai (jėga, greitis, pagreitis ir kiti) apibūdinami ne tik skaičiumi, bet ir kryptimi. Pavyzdžiui, norint apibūdinti kūno judėjimą kuriuo nors momentu, neužtenka pasakyti, kad jis juda 60 km/h greičiu: reikia dar nurodyti judėjimo kryptį, būtent, greičio kryptį. Todėl tokio tipo fizikinius dydžius patogu vaizduoti kryptinėmis atkarpomis. Taip vaizduoti fizikinius dydžius patogu ir dėl kitų priežasčių. Pateiksime pavyzdį. Patirtis rodo, kad jėgos a ir b kūną A (166 pav.) veikia kaip viena jėga c, kurią vaizduoja ant atkarpų a ir b nubraižyto lygiagretainio įstrižainė. Galima pateikti ir daugiau pavyzdžių, kurie parodo, kad operacijas su fizikiniais dydžiais, pavaizduotais atkarpomis, galima pakeisti paprastų geometrinių figūrų braižymu.



166 pav.

Kryptinė atkarpa vadinama *vektoriumi* (167 pav.). Vektoriaus kryptis nustatoma nurodant jo pradžią ir pabaigą. Brėžinyje vektoriaus kryptis žymima rodykle. Vektoriams žymėti vartosime mažąsias raides a, b, c, ... Vektorių galima žymėti nurodant jo pradžią ir pabaigą. Tada pirma rašoma raidė, reiškianti vektoriaus pradžią. Vietoj žo-



167 pav.

džio „vektorius" virš ją žyminčių raidžių kartais brėžiama rodyklė arba brūkšnys. 167 paveikslo vektorių galima užrašyti taip: $\vec{a}$ arba $\overline{AB}$.

VEKTORIAUS ILGIS IR KRYPTIS

Vienakryptėmis pustiesėmis vadinamos dvi pustiesės, kurias galima sutapdinti lygiagrečiuoju postūmiu. Kitaip sakant, yra toks lygiagretusis postūmis, kad viena pustiesė pereina į kitą.

Jei pustiesė a vienakryptė su b, o pustiesė b vienakryptė su c, tai pustiesės a ir c taip pat vienakryptės.

Iš tikrųjų, kadangi *a* ir *b* — vienakryptės pustiesės, tai yra toks lygiagretusis postūmis, kad pustiesė *a* pereina į *b*. Kadangi *b* ir *c* — vienakryptės pustiesės, tai yra kitas lygiagretusis postūmis, kuris pustiesę *b* sutapdina su *c*. Tie lygiagretieji postūmiai, atlikti iš eilės, sudaro lygiagretųjį postūmį, kuris pustiesę *a* sutapdina su *c*. Vadinasi, *a* ir *c* — vienakryptės pustiesės.

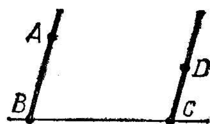
Dvi pustiesės vadinamos *priešpriešėmis*, kai kiekviena jų yra vienakryptė su pustiese, papildančia kitą pustiesę.

Uždavinys (5). Nubrėžtos lygiagrečios tiesės *AB* ir *CD*. Taškai *A* ir *D* yra vienoje kirstinės *BC* pusėje. Įrodykite, kad spinduliai *BA* ir *CD* yra vienakrypčiai.

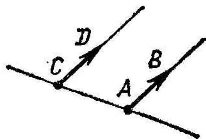
Sprendimas. Spinduliui *CD* pritaikykime lygiagretųjį postūmį, kuris tašką *C* sutapdina su tašku *B* (168 pav.). Tuomet tiesė *CD* sutaps su tiese *BA*. Taškas *D*, slinkdamas tiese, lygiagrečia tiesei *CB*, liks toje pačioje pusplokštumėje tiesės *BC* atžvilgiu. Todėl spindulys *CD* sutaps su spinduliu *BA*. Vadinasi, tie spinduliai yra vienakrypčiai.

Vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ vadinami *vienakrypčiais*, kai pustiesės *AB* ir *CD* yra vienakryptės. Vektoriaus *ilgiu* (arba *moduliu*) vadiname tą vektorių vaizduojančios atkarpos ilgį. Vektoriaus $\bar{a}$ ilgis žymimas $|\bar{a}|$.

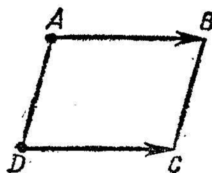
Lygiais vektoriais vadiname du vektorius, kuriuos galima sutapdinti lygiagrečiuoju postūmiu. Tai reiškia, jog yra toks lygiagretusis postūmis, kuris vieno vektoriaus pradžią sutapdina su kito vektoriaus pradžia, o pabaigą — su pabaiga. Iš to aišku, kad *lygūs*



168 pav.



169 pav.



170 pav.

vektoriai yra vienakrypčiai ir turi vienodą ilgį. Atvirkščiai, *jei vienakrypčiai vektoriai yra vienodo ilgio, tai jie lygūs.* Iš tikrųjų, tarkime, kad $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ yra vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai vienodi (169 pav.). Lygiagretusis postūmis, kuris tašką C sutapdina su tašku A, pustiesę CD sutapdins su pustiese AB, nes tos pustiesės yra vienakryptės. Kadangi atkarpos AB ir CD lygios, tai taškas D sutaps su B. Vadinasi, vektorius $\overline{CD}$ lygiagrečiuoju postūmiu sutapdinamas su vektoriumi $\overline{AB}$. Todėl tie vektoriai lygūs.

Uždavinys (9). Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Įrodykite, kad vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{DC}$ lygūs.

Sprendimas. Vektorių $\overline{AB}$ pastumsime lygiagrečiai, kad taškas A sutaptų su tašku D (170 pav.). Tokiu atveju taškas A pasislinks tiese AD, o taškas B — jai lygiagrečia tiese BC. Tiesė AB pereis į jai lygiagrečią tiesę, t. y. į tiesę DC. Todėl taškas B sutaps su tašku C. Vadinasi, tas lygiagretusis postūmis vektorių $\overline{AB}$ sutapdina su vektoriumi $\overline{DC}$. Taigi tie vektoriai yra lygūs.

Vektoriaus pradžia gali sutapti su jo pabaiga. Tokį vektorių vadinsime *nuliniu vektoriumi.* Nulinis vektorius žymimas nuliu su virš jo nubrėžtu brūkšniu: $\overline{0}$. Nulinis vektorius neturi krypties. Jo ilgį laikome lygiu nuliui. Visus nulinius vektorius susitarsime laikyti lygiais.

Remdamiesi lygiagrečiojo postūmio savybėmis (10.1 teorema), darome išvadą: ***iš kiekvieno taško galima nubrėžti vienintelį vektorių, lygų duotam vektoriui.*** Norint tai įrodyti, užtenka nurodytąjį vektorių pastumti lygiagrečiai, kad jo pradžia sutaptų su duotuoju tašku.

VEKTORIAUS KOORDINATĖS

Sakykime, vektoriaus $\bar{a}$ pradžia yra taškas $A_1(x_1, y_1)$, o pabaiga — taškas $A_2(x_2, y_2)$. Vektoriaus $\bar{a}$ *koordinatėmis* vadinsime skaičius $a_1 = x_2 - x_1$ ir $a_2 = y_2 - y_1$. Vektoriaus koordinates rašysime po raidės, žyminčios vektorių, šiuo atveju $\bar{a}(a_1, a_2)$, arba tiesiog $\overline{(a_1, a_2)}$. Nulinio vektoriaus koordinatės lygios nuliui.

Iš formulės, išreiškiančios atstumą tarp dviejų taškų koordinatėmis, išplaukia, kad vektoriaus, kurio koordinatės yra a_1 ir a_2, ilgis lygus $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

10.3 teorema. ***Lygūs vektoriai turi lygias atitinkamas koordinates.*** Atvirkščiai, ***jei vektorių atitinkamos koordinatės lygios, tai vektoriai lygūs.***

Įrodymas. Sakykime, vektoriaus $\bar{a}$ pradžia yra taškas $A_1(x_1, y_1)$, o pabaiga — taškas $A_2(x_2, y_2)$. Kadangi jam lygus vektorius $\bar{a}'$ gaunamas iš vektoriaus $\bar{a}$ lygiagrečiuoju postūmiu, tai jo pradžia bus taškas $A_1'(x_1+c, y_1+d)$, o pabaiga — taškas $A_2'(x_2+c, y_2+d)$. Iš to aišku, kad vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{a}'$ turi vienodas koordinates $x_2 - x_1$ ir $y_2 - y_1$.

Įrodysime atvirkščią teiginį. Sakykime, atitinkamos vektorių $\overline{A_1A_2}$ ir $\overline{A_1'A_2'}$ koordinatės lygios. Įsitikinsime, kad tie vektoriai lygūs. Jei taško A_1' koordinatės yra x_1' ir y_1', o taško A_2' koordinatės x_2' ir y_2', tai pagal teoremos sąlygą $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$. Todėl $x_2' = x_2 + x_1' - x_1$, $y_2' = y_2 + y_1' - y_1$. Lygiagretusis postūmis, nusakomas formulėmis

$$x' = x + x_1' - x_1, \quad y' = y + y_1' - y_1,$$

tašką A_1 sutapdina su tašku A_1', o tašką A_2 — su tašku A_2'. Vadinasi, vektoriai $\overline{A_1A_2}$ ir $\overline{A_1'A_2'}$ lygūs. Teorema įrodyta.

Uždavinys (13). Duoti trys taškai: $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$ ir $C(0, 1)$. Raskite tokį tašką $D(x, y)$, kad vektorius $\overline{AB}$ būtų lygus vektoriui $\overline{CD}$.

Sprendimas. Vektoriaus $\overline{AB}$ koordinatės yra -2 ir -1. Vektoriaus $\overline{CD}$ koordinatės yra $x-0$ ir $y-1$. Kadangi $\overline{AB} = \overline{CD}$, tai $x - 0 = -2$, $y - 1 = -1$. Iš čia sužinome taško D koordinates: $x = -2$, $y = 0$.

Vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$, kurių koordinatės yra a_1, a_2 ir b_1, b_2, *suma* vadiname vektorių $\bar{c}$, kurio koordinatės lygios a_1+b_1, a_2+b_2, t. y.

$$\bar{a}(a_1, a_2)+\bar{b}(b_1, b_2)=\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2).$$

Esant bet kokiems vektoriams $\bar{a}(a_1, a_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$ ***ir*** $\bar{c}(c_1, c_2)$, ***bus teisingos lygybės***

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},$$
$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

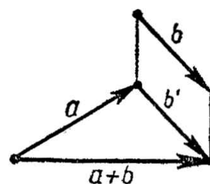
Norint tai įrodyti, užtenka palyginti vektorių, parašytų lygybės kairėje ir dešinėje pusėje, atitinkamas koordinates. Įsitikinsime, kad jos lygios. Iš 10.3 teoremos žinome, kad vektoriai su atitinkamai lygiomis koordinatėmis yra lygūs.

10.4 teorema. ***Esant bet kuriems taškams A, B ir C, bus teisinga vektorinė lygybė***

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

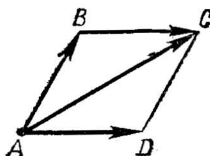
Įrodymas. Tarkime, kad tie trys taškai yra $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ir $C(x_3, y_3)$. Vektoriaus $\overline{AB}$ koordinatės bus skaičiai x_2-x_1, y_2-y_1, o vektoriaus $\overline{BC}$ — skaičiai x_3-x_2, y_3-y_2. Vadinasi, vektoriaus $\overline{AB}+\overline{BC}$ koordinatės bus x_3-x_1, y_3-y_1. Tokios yra vektoriaus $\overline{AC}$ koordinatės. Remdamiesi 10.3 teorema, teigiame, kad vektoriai $\overline{AB}+\overline{BC}$ ir $\overline{AC}$ lygūs. Teorema įrodyta.

Remdamiesi 10.4 teorema, galime nubraižyti bet kokių vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ sumą. Tam reikalui nuo vektoriaus $\bar{a}$ pabaigos atidedame vektorių $\bar{b}'$, lygų vektoriui $\bar{b}$. Tuomet vektorius, kurio pradžia sutampa su vektoriaus $\bar{a}$ pradžia, o pabaiga — su vektoriaus $\bar{b}'$ pabaiga, bus vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ suma (171 pav.).

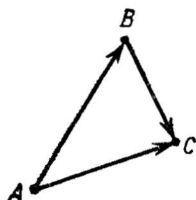


171 pav.

Uždavinys (16). Nubraižytas lygiagretainis *ABCD*. Įrodykite, kad teisinga vektorinė lygybė $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$ (vektorių sudėties *„lygiagretainio taisyklė"*).



172 pav.



173 pav.

Sprendimas. Kadangi $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (172 pav.), o vektoriai $\overline{BC}$ ir $\overline{AD}$ lygūs (žr. 9 uždavinį), tai $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

Vektorių $\bar{a}(a_1, a_2)$ ir $\bar{b}(b_1, b_2)$ *skirtumu* vadiname vektorių $\bar{c}(c_1, c_2)$, kurį sudėję su vektoriumi $\bar{b}$, gauname vektorių $\bar{a}$, t. y. $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$. Iš to nustatome vektoriaus $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ koordinates: $c_1=a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$.

Uždavinys (19). Vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$ turi bendrą pradžią (173 pav.). Įrodykite, kad $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

Sprendimas. Buvo įrodyta, kad $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$. Tai reiškia, kad $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

VEKTORIAUS DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS

Vektoriaus $\overline{(a_1, a_2)}$ *ir skaičiaus* λ *sandauga* vadiname vektorių $\overline{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$, t. y.

$$\overline{(a_1, a_2)}\lambda=\overline{(\lambda a_1, \lambda a_2)}.$$

Be to, susitariame, kad $\overline{(a_1, a_2)}\lambda=\lambda\overline{(a_1, a_2)}$.

Remdamiesi vektoriaus daugybos iš skaičiaus apibrėžimu, įsitikiname, kad, ***esant bet kokiam vektoriui*** $\bar{a}$ ***ir bet kuriems skaičiams*** λ ***ir*** μ, ***teisinga tokia lygybė:***

$$(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}.$$

Be to, ***esant bet kokiems vektoriams a ir b ir bet kuriam skaičiui*** λ, ***bus teisinga lygybė***

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}.$$

10.5 teorema. ***Jei*** $\bar{a}\neq\bar{0}$ ***ir*** $\lambda>0$, ***tai vektoriaus*** $\lambda\bar{a}$ ***kryptis sutampa su vektoriaus*** $\bar{a}$ ***kryptimi; jei*** $\lambda<0$ $(\bar{a}\neq\bar{0})$, ***tai vektoriaus*** $\lambda\bar{a}$ ***kryptis priešinga vektoriaus*** $\bar{a}$ ***krypčiai. Vektoriaus*** $\lambda\bar{a}$ ***ilgis lygus*** $|\lambda||\bar{a}|$.

Įrodymas. Nubrėžkime vektorius $\overline{OA}$ ir $\overline{OB}$ (O — koordinačių pradžia), atitinkamai lygius vektoriams $\bar{a}$ ir $\lambda\bar{a}$. Jei vektoriaus $\bar{a}$ koordinatės yra a_1 ir a_2, tai taško A koordinatės — skai-

čiai a_1 ir a_2, o taško B — skaičiai λa_1 ir λa_2. Parašykime tiesės OA lygtį:

$$\alpha x+\beta y=0.$$

Kadangi tą lygtį tenkina taško $A(a_1, a_2)$ koordinatės, tai ją tenkina ir taško $B(\lambda a_1, \lambda a_2)$ koordinatės. Iš to aišku, kad taškas B priklauso tiesei OA. Jei taškas C yra pustiesėje OA, tai jo koordinačių c_1 ir c_2 ženklai sutampa su atitinkamų taško A koordinačių a_1 ir a_2 ženklais. Jei taškas C priklauso pustiesei, papildančiai pustiesę OA, tai koordinačių c_1 ir c_2 ženklai yra priešingi taško A koordinačių ženklams. Todėl taškas B, kai $\lambda>0$, yra pustiesėje OA. Vadinasi, šiuo atveju vektoriai $\bar{a}$ ir $\lambda\bar{a}$ yra vienakrypčiai. Jei $\lambda<0$, tai taškas B yra papildomojoje pustiesėje, todėl vektoriai $\bar{a}$ ir $\lambda\bar{a}$ yra priešpriešiai.

Vektoriaus $\lambda\bar{a}$ ilgis lygus $|\lambda\bar{a}|=\sqrt{|\lambda a_1|^2+|\lambda a_2|^2}=$ $=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|\lambda||\bar{a}|$. Teorema įrodyta.

Uždavinys (22). Taškai $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ nesutampa. Įrodykite, kad vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{BA}$ yra priešpriešiai.

Sprendimas. Vektoriaus $\overline{AB}$ koordinatės yra skaičiai x_2-x_1 ir y_2-y_1, o vektoriaus $\overline{BA}$ — skaičiai x_1-x_2 ir y_1-y_2. Iš to aišku, kad $\overline{AB}=(-1)\overline{BA}$. Remdamiesi 10.5 teorema, įsitikiname, kad vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{BA}$ yra priešpriešiai.

Kolineariais vektoriais vadinami du nenuliniai vektoriai, kurie yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse.

10.6 teorema. ***Kolinearių vektorių atitinkamos koordinatės yra proporcingos.*** Atvirkščiai, ***jei dviejų vektorių atitinkamos koordinatės proporcingos, tai tie vektoriai kolinearūs.***

Įrodymas. Tarkime, kad vektoriai $\bar{a}(a_1, a_2)$ ir $\bar{b}(b_1, b_2)$ yra kolinearūs ir vienakrypčiai. Sudarykime vektorių $\bar{c}=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$. Vektorius $\bar{c}$ lygus vektoriui $\bar{a}$, nes pagal 10.5 teoremą jie yra vienakrypčiai ir turi vienodą ilgį. Palyginę vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{c}$ koordinates, gauname

$$a_1=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}b_1, \quad a_2=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}b_2.$$

Iš to aišku, kad $\frac{b_1}{a_1}=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, $\frac{b_2}{a_2}=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. Todėl $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, t. y. vektorių a ir b koordinatės proporcingos.

Jei vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ yra priešpriešiai, tai reikia sudaryti vektorių $\bar{c}=-\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$. Tuomet visiškai panašiai įsitikiname, kad $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$.

Dabar tarkime, kad vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ koordinatės proporcingos. Įsitikinsime, kad tie vektoriai kolinearūs. Šiuo atveju

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

Tų santykių bendrą reikšmę pažymėję raide λ, gausime: $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$. Iš to išplaukia lygybė $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, o tai reiškia, kad šie vektoriai kolinearūs (10.5 teorema).

Uždavinys (31). Vektoriai $\bar{a}(1, -1)$ ir $\bar{b}(-2, m)$ yra kolinearūs. Raskite m.

Sprendimas. Kolineariųjų vektorių koordinatės yra proporcingos. Todėl $\frac{-2}{1}=\frac{m}{-1}$. Iš čia $m=2$.

Vienetiniu vektoriumi vadinamas vektorius, kurio ilgis lygus vienetui. Vienetinis vektorius, kurio kryptis sutampa su teigiamosios koordinačių pusašės kryptimi, vadinamas *koordinatiniu vektoriumi*, arba *ortu*. Abscisių ašies ortą žymėsime $\bar{e}_1(1, 0)$, o ordinačių ašies ortą $\bar{e}_2(0, 1)$.

Kiekvieną vektorių $\bar{a}(a_1, a_2)$ galima išreikšti šitaip:

$$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2.$$

Iš tikrųjų, $\overline{(a_1, a_2)}=\overline{(a_1, 0)}+\overline{(0, a_2)}=a_1\overline{(1, 0)}+a_2\overline{(0, 1)}=a_1\bar{e}_1+$ $+a_2\bar{e}_2$.

Uždavinys (35). Duoti vektoriai $\bar{a}(1, 0)$, $\bar{b}(1, 1)$ ir $\bar{c}(-1, 0)$. Raskite skaičius λ ir μ, su kuriais teisinga vektorinė lygybė $\bar{c}=$ $=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.

Sprendimas. Palyginę atitinkamas vektorių $\bar{c}$ ir $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$ koordinates, gauname dvi lygtis. Iš jų randame λ ir μ: $-1=$ $=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 1$, $0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1$. Iš čia $\mu=0$, $\lambda=-1$.

VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA

Vektorių $\bar{a}(a_1, a_2)$ ir $\bar{b}(b_1, b_2)$ *skaliarine sandauga* vadiname skaičių $a_1b_1+a_2b_2$. Vektorių skaliarinė sandauga žymima taip pat, kaip ir skaičių sandauga. Skaliarinė sandauga $\bar{a}\bar{a}$ žymima $\bar{a}^2$. Lengva įsitikinti, kad $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

Iš vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad, esant bet kokiems vektoriams $\bar{a}(a_1, a_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$ ir $\bar{c}(c_1, c_2)$, yra teisinga lygybė

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$

Iš tikrųjų, kairėje lygybės pusėje yra skaičius $(a_1+b_1)c_1+(a_2+$ $+b_2)c_2$, o dešinėje — skaičius $a_1c_1+a_2c_2+b_1c_1+b_2c_2$. Savaime aišku, kad jie lygūs.

Kampu tarp nenulinių vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$ vadiname kampą BAC. Kampu tarp bet kurių vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ vadiname kampą tarp jiems lygių vektorių, turinčių bendrą pradžią. Kampas tarp vienakrypčių vektorių laikomas lygiu nuliui.

10.7 teorema. ***Vektorių skaliarinė sandauga lygi jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandaugai.***

Įrodymas. Sakykime, vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ sudaromas kampas lygus φ. Kadangi

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})=(\bar{a}+\bar{b})\bar{a}+(\bar{a}+\bar{b})\bar{b}=$$
$$=\bar{a}\bar{a}+\bar{b}\bar{a}+\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{b}=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2,$$

tai

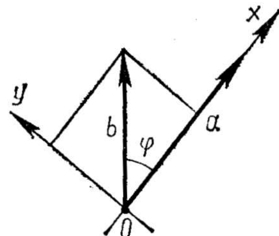
$$|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\bar{a}\bar{b}.$$

Iš to aišku, kad skaliarinė sandauga išreiškiama vektorių $\bar{a}$, $\bar{b}$ ir $\bar{a}+\bar{b}$ ilgiais. Todėl ji nepriklauso nuo koordinačių sistemos. Vadinasi, skaliarinė sandauga nepasikeis, jei sudarysime specialią koordinačių sistemą. Sudarykime koordinačių sistemą xy, nurodytą 174 paveiksle. Tuomet vektoriaus $\bar{a}$ koordinatės bus skaičiai $|\bar{a}|$ ir 0, o vektoriaus $\bar{b}$ — skaičiai $|\bar{b}|\cos\varphi$ ir $|\bar{b}|\sin\varphi$. Todėl skaliarinę sandaugą apskaičiuosime šitaip:

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi+0|\bar{b}|\sin\varphi=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Teorema įrodyta.

Iš 10.7 teoremos gauname išvadą: ***jei vektoriai vienas kitam statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.*** Atvirkš-



174 pav.

čia, jei nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, tai jie vienas kitam statmeni.

Uždavinys (47). Duoti vektoriai $\bar{a}(1, 0)$ ir $\bar{b}(1, 1)$. Raskite tokį skaičių λ, kad vektorius $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ būtų statmenas vektoriui $\bar{a}$.

Sprendimas. Kadangi $\bar{a}(\bar{a}+\lambda\bar{b})=0$, tai $\bar{a}^2+\lambda(\bar{a}\bar{b})=0$. Iš čia $\lambda=-\frac{\bar{a}^2}{\bar{a}\bar{b}}=-\frac{1}{1}=-1$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, ką vadiname lygiagrečiuoju postūmiu.
2. Įrodykite, kad lygiagretusis postūmis yra judesys.
3. Įrodykite, kad, vykstant lygiagrečiajam postūmiui, figūros taškai slenka lygiagrečiomis (arba sutampančiomis) tiesėmis vienodu atstumu.
4. Įrodykite, kad lygiagrečiuoju postūmiu tiesė sutapdinama su jai lygiagrečia tiese (arba su ja pačia).
5. Įrodykite, kad egzistuoja vienintelis lygiagretusis postūmis, kuris tašką A perveda į tašką A'.
6. Įrodykite, kad transformacija, atvirkštinė lygiagrečiajam postūmiui, yra lygiagretusis postūmis. Du lygiagretieji postūmiai, atliekami vienas po kito, sudaro lygiagretųjį postūmį.
7. Ką vadiname vektoriumi?
8. Kokias pustieses vadiname vienakryptėmis?
9. Įrodykite teiginį: jei pustiesė a yra vienakryptė su pustiesėmis b ir c, tai pustiesės b ir c irgi yra vienakryptės.
10. Kokios pustiesės vadinamos priešpriešėmis?
11. Ką reiškia pasakymas: vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ yra vienakrypčiai?
12. Ką vadiname vektoriaus ilgiu?
13. Kokius vektorius vadiname lygiais?
14. Įrodykite, kad iš kiekvieno taško galima nubrėžti vienintelį vektorių, lygų duotajam vektoriui.
15. Įrodykite, kad lygūs vektoriai yra vienakrypčiai ir vienodo ilgio. Atvirkščiai, vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai vienodi, yra lygūs.
16. Ką vadiname vektoriaus koordinatėmis?
17. Įrodykite, kad lygūs vektoriai turi atitinkamai lygias koordinates, o vektoriai, kurių atitinkamos koordinatės lygios, yra lygūs.
18. Pasakykite vektorių sumos apibrėžimą.
19. Įrodykite, kad, esant bet kokiems vektoriams $\bar{a}$ ir $\bar{b}$,

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}.$$

20. Įrodykite, kad, esant bet kokiems vektoriams $\bar{a}$, $\bar{b}$ ir $\bar{c}$,

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

21. Įrodykite vektorinę lygybę $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.
22. Įrodykite, kad, norint sudėti vektorius $\bar{a}$ ir $\bar{b}$, reikia iš vektoriaus $\bar{a}$ pabaigos nubrėžti vektorių $\bar{b}'$, lygų vektoriui $\bar{b}$. Tuomet vektorius, kurio pradžia sutampa su vektoriaus $\bar{a}$ pradžia, o pabaiga — su vektoriaus $\bar{b}'$ pabaiga, yra lygus $\bar{a}+\bar{b}$.
23. Pasakykite vektorių skirtumo apibrėžimą.
24. Pasakykite vektoriaus daugybos iš skaičiaus apibrėžimą.
25. Įrodykite, kad vektoriaus $\lambda\bar{a}$ kryptis, kai $\lambda>0$ ir $\bar{a}\neq\bar{0}$, sutampa su vektoriaus $\bar{a}$ kryptimi, o kai $\lambda<0$ $(\bar{a}\neq\bar{0})$, yra priešinga vektoriaus $\bar{a}$ krypčiai. Vektoriaus $\lambda\bar{a}$ ilgis lygus $|\lambda||\bar{a}|$.
26. Kokie vektoriai vadinami kolineariais?
27. Įrodykite, kad vektoriai $\overline{(a_1, a_2)}$ ir $\overline{(b_1, b_2)}$ kolinearūs tada ir tik tada, kai $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.
28. Koks vektorius vadinamas vienetiniu?
29. Įrodykite, kad kiekvieną vektorių $\bar{a}(a_1, a_2)$ galima išreikšti suma $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$, kurios $\bar{e}_1$ ir $\bar{e}_2$ yra koordinačių ašių vienetiniai vektoriai.
30. Pasakykite vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimą.
31. Įrodykite, kad, esant bet kokiems vektoriams $\bar{a}$, $\bar{b}$ ir $\bar{c}$,

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$

32. Kaip apibrėžiamas kampas tarp vektorių?
33. Kam lygus kampas tarp vienakrypčių vektorių?
34. Įrodykite, kad vektorių skaliarinė sandauga lygi jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandaugai.
35. Įrodykite teiginį: jei vektoriai vienas kitam statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Atvirkščiai, jei nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui, tai jie vienas kitam statmeni.

PRATIMAI

1. Lygiagretusis postūmis išreikštas formulėmis $x'=x+1$, $y'=y-1$. Į kuriuos taškus šiuo lygiagrečiuoju postūmiu pervedami taškai (0, 0), (1, 0) ir (0, 2)?
2. Raskite skaičius a ir b, parašytus lygiagrečiojo postūmio formulėse $x'=x+a$, $y'=y+b$, kai: 1) taškas (1, 2) pereina į tašką (3, 4); 2) taškas (2, −3) — į tašką (−1, 5); 3) taškas (−1, −3) — į tašką (0, −2).
3. Lygiagrečiuoju postūmiu taškas (1, 1) pervedamas į tašką (−1, 0). Į kurį tašką pereina koordinačių pradžia?
4. Ar yra toks lygiagretusis postūmis, kad: 1) taškas (1, 2) pereitų į tašką (3, 4), o taškas (0, 1) — į tašką (−1, 0);

2) taškas (2, −1) pereitų į tašką (1, 0), o taškas (−1, 3) — į tašką (0, 4)?

5. Nubrėžtos lygiagrečios tiesės AB ir CD. Taškai A ir D yra vienoje kirstinės BC pusėje. Įrodykite, kad spinduliai BA ir CD yra vienakrypčiai.
6. Įrodykite, kad 5 uždavinyje nurodyti spinduliai BA ir CD yra priešpriešiai, kai taškai A ir D yra skirtingose kirstinės BC pusėse.
7. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Iš spindulių AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA sudarykite vienakrypčių spindulių poras ir priešpriešių spindulių poras.
8. Tiesėje yra trys taškai: A, B ir C. Taškas B yra tarp A ir C. Pasakykite, kurie iš vektorių $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ ir $\overline{BC}$ yra vienakrypčiai ir kurie priešpriešiai.
9. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Įrodykite, kad vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{DC}$ lygūs.
10. Įrodykite, kad $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$, kai $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ir $\overline{AC}$ — bet kokie vektoriai.
11. Įrodykite, kad $|\bar{a}+\bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$, kai $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ — bet kokie vektoriai.
12. Duoti taškai $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$ ir $D(2, 1)$. Įrodykite, kad vektorius $\overline{AB}$ lygus vektoriui $\overline{CD}$.
13. Duoti trys taškai: $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$ ir $C(0, 1)$. Raskite tokį tašką $D(x, y)$, kad vektorius $\overline{AB}$ būtų lygus vektoriui $\overline{CD}$.
14. Vektoriaus $\bar{a}(5, m)$ ilgis lygus 13. Raskite m.
15. Vektoriaus $\bar{b}(n, 24)$ ilgis lygus 25. Raskite n.
16. Nubraižytas lygiagretainis $ABCD$. Įrodykite, kad teisinga vektorinė lygybė $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.
17. Raskite vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ sumą: 1) $\bar{a}(1, -2)$ ir $\bar{b}(2, -3)$; 2) $\bar{a}(-3, 4)$ ir $\bar{b}(2, -3)$; 3) $\bar{a}(3, 1)$ ir $\bar{b}(-2, -1)$; 4) $\bar{a}(-5, 4)$ ir $\bar{b}(2, -2)$; 5) $\bar{a}(-1, 1)$ ir $\bar{b}(2, 4)$.
18. Raskite vektorių $\bar{a}-\bar{b}$, kai: 1) $\bar{a}(1, 4)$, $\bar{b}(1, 3)$; 2) $\bar{a}(-3, 2)$, $\bar{b}(2, -1)$; 3) $\bar{a}(5, 3)$, $\bar{b}(4, 4)$; 4) $\bar{a}(3, 3)$, $\bar{b}(4, 2)$; 5) $\bar{a}(1, 5)$, $\bar{b}(2, 7)$.
19. Vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{AC}$ turi bendrą pradžią. Įrodykite, kad $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.
20. Apskaičiuokite vektoriaus $\bar{a}+\bar{b}$ ilgį, kai: 1) $\bar{a}(1, -4)$, $\bar{b}(-4, 8)$; 2) $\bar{a}(2, 5)$, $\bar{b}(4, 3)$; 3) $\bar{a}$ (10, 7), $\bar{b}(2, -2)$.
21. Raskite vektoriaus $\bar{a}-\bar{b}$ ilgį, kai: 1) $\bar{a}(1, -4)$, $\bar{b}(-4, 8)$; 2) $\bar{a}(-2, 7)$, $\bar{b}(4, -1)$; 3) $\bar{a}(15, 0)$, $\bar{b}(0, -8)$.
22. Taškai $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ nesutampa. Įrodykite, kad vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{BA}$ yra priešpriešiai.
23. Įrodykite, kad vektoriai $\bar{a}(1, 2)$ ir $\bar{b}(0,5; 1)$ yra vienakrypčiai, o vektoriai $\bar{c}(-1, 2)$ ir $\bar{d}(0,5; -1)$ — priešpriešiai.

24. Duotas vektorius $\bar{a}(3, 4)$. Raskite dukart ilgesnį vektorių $\bar{b}(b_1, b_2)$, kuris yra: 1) vienakryptis su vektoriumi $\bar{a}$; 2) priešpriešis vektoriui $\bar{a}$.
25. Duoti vektoriai $\bar{a}(3, 2)$ ir $\bar{b}(0, -1)$. Raskite vektorių: 1) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; 2) $3\bar{a}-\bar{b}$; 3) $4\bar{a}+\bar{b}$.
26. Duoti vektoriai $\bar{a}(3, 2)$ ir $\bar{b}(0, -1)$. Raskite šių vektorių ilgį: 1) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; 2) $4\bar{a}+3\bar{b}$; 3) $5\bar{a}+10\bar{b}$.
27. Raskite vektoriaus $3\bar{a}$ ilgį, kai: 1) $\bar{a}(3, 4)$; 2) $\bar{a}(-5, 12)$; 3) $\bar{a}(-6, -8)$.
28. Vektoriaus $\lambda\bar{a}$ ilgis lygus 5. Raskite λ, kai: 1) $\bar{a}(-6, 8)$; 2) $\bar{a}(3, -4)$; 3) $\bar{a}(5, 12)$.
29. Duoti vektoriai $\bar{a}(2, -4)$, $\bar{b}(1, 2)$, $\bar{c}(1, -2)$ ir $\bar{d}(-2, -4)$. Sudarykite kolinearių vektorių poras.
30. Kurie 29 uždavinyje nurodyti vektoriai yra vienakrypčiai ir kurie — priešpriešiai? Kurie iš tų vektorių yra vienodo ilgio?
31. Vektoriai $\bar{a}(1, -1)$ ir $\bar{b}(-2, m)$ yra kolinearūs. Raskite m.
32. Kokia turi būti n reikšmė, kad vektoriai $\bar{a}(n, 1)$ ir $\bar{b}(4, n)$ būtų kolinearūs ir vienakrypčiai?
33. Nurodykite, kurie iš vektorių $\bar{a}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{c}(0, -1)$ ir $\bar{d}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ yra vienetiniai. Kurie iš jų yra kolinearūs?
34. Raskite vienetinį vektorių, kolinearų vektoriui $\bar{a}(6, 8)$ ir vienakryptį su juo.
35. Duoti vektoriai $\bar{a}(1, 0)$, $\bar{b}(1, 1)$ ir $\bar{c}(-1, 0)$. Raskite skaičius λ ir μ, su kuriais teisinga vektorinė lygybė $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.
36. Taškas M yra atkarpos AB vidurys, o taškas N — atkarpos CD vidurys. Įrodykite, kad $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$.
37. Duoti koordinatiniai vektoriai $\bar{e}_1(1, 0)$ ir $\bar{e}_2(0, 1)$. Raskite vektoriaus $2\bar{e}_1-3\bar{e}_2$ koordinates.
38. Vektorius $\bar{a}(-5, 4)$ išreikštas šitaip: $\bar{a}=\lambda\bar{e}_1+\mu\bar{e}_2$. Raskite skaičius λ ir μ.
39. Įrodykite, kad, esant bet kokiems vektoriams $\bar{a}$ ir $\bar{b}$, yra teisinga tokia nelygybė: $(\bar{a}\bar{b})^2\leqslant\bar{a}^2\bar{b}^2$.
40. Raskite kampą tarp vektorių $\bar{a}(1, 2)$ ir $\bar{b}\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.
41. Vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ ilgiai lygūs 1; jie sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite vektoriaus $\bar{a}+\bar{b}$ ilgį.
42. Raskite kampą tarp 41 uždavinyje nurodytų vektorių $\bar{a}$ ir $\bar{a}+\bar{b}$.
43. Trikampio viršūnės yra taškai $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ ir $C(4, 5)$. Apskaičiuokite to trikampio kampų kosinusus.
44. Trikampio viršūnės yra taškai $A(0, \sqrt{3})$, $B(2, \sqrt{3})$ ir $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Raskite to trikampio kampus.

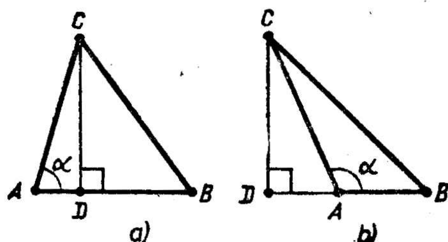
45. Įrodykite, kad vektoriai $\bar{a}(m, n)$ ir $\bar{b}(-n, m)$ arba statmeni, arba nuliniai vektoriai.
46. Kokia turi būti kintamojo m reikšmė, kad vektorius $\bar{a}(3, 4)$ būtų statmenas vektoriui $\bar{b}(m, 2)$?
47. Duoti vektoriai $\bar{a}(1, 0)$ ir $\bar{b}(1, 1)$. Raskite tokį skaičių λ, kad vektorius $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ būtų statmenas vektoriui $\bar{a}$.
48. Kokia turi būti λ reikšmė, kad 47 uždavinyje nurodytas vektorius $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ būtų statmenas vektoriui $\bar{b}$?
49. Įrodykite, kad $\bar{a}+\bar{b}$ ir $\bar{a}-\bar{b}$ yra nenuliniai statmeni vektoriai, kai $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ — vienetiniai nekolinearūs vektoriai.
50. Vienetiniai vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ sudaro 60° kampą. Įrodykite, kad vektorius $2\bar{b}-\bar{a}$ statmenas vektoriui $\bar{a}$.
51. Vektorius $\bar{a}+\bar{b}$ statmenas vektoriui $\bar{a}-\bar{b}$. Įrodykite, kad $|\bar{a}|=|\bar{b}|$.
52. Įrodykite su vektoriais, kad rombo įstrižainės yra statmenos.
53. Duoti taškai: $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(0, 4)$ ir $D(-1, 2)$. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis.
54. Duoti taškai: $A(0, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 2)$ ir $D(1, 1)$. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra kvadratas.
55. 1) Yra trys taškai: O, A ir B. Taškas X dalija atkarpą AB santykiu $\lambda : \mu$, skaitant nuo taško A. Vektorių $\overline{OX}$ išreikškite vektoriais $\overline{OA}=\bar{a}$ ir $\overline{OB}=\bar{b}$.
2) Įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris dalija jas santykiu 2 : 1, skaitant nuo atitinkamų viršūnių.

§ 11. TRIKAMPIŲ SPRENDIMAS

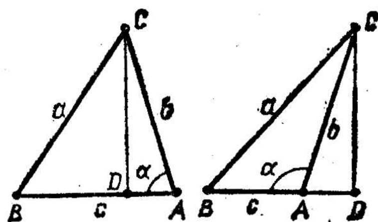
KOSINUSŲ TEOREMA

11.1 t e o r e m a (kosinusų teorema). ***Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai minus dviguba sandauga tų kraštinių ir tarp jų esančio kampo kosinuso.***

Į r o d y m a s. Sakykime, ABC — duotasis trikampis (175 pav.). Įrodysime, kad $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$.



175 pav.



176 pav.

Iš vektorinės lygybės $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ randame $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$. Šios lygybės skaliarinis kvadratas yra toks:

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}.$$

Iš čia

$$|\overline{BC}|^2=|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2-2|\overline{AB}||\overline{AC}|\cos A.$$

Teorema įrodyta.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad $|\overline{AC}|\cos A$ yra kraštinės AC projekcijos AD kraštinėje AB (175 pav., *a*) arba jos tęsinyje (175 pav., *b*) modulis. $|\overline{AC}|\cos A$ ženklas priklauso nuo kampo A: „+", jei kampas A smailus, „−", jei kampas A bukas. Iš čia gauname tokią išvadą: ***trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai „±" dviguba sandauga vienos jų ir kitos kraštinės projekcijos joje.*** Ženklą „+" reikia rašyti tada, kai priešingas kampas yra bukas, o ženklą „−" rašyti, kai tas kampas smailus.

Uždavinys (1). Duotos trikampio kraštinės a, b, c. Raskite trikampio aukštinę, išvestą į kraštinę c.

Sprendimas. $a^2=b^2+c^2\pm 2c\cdot AD$ (176 pav.). Iš čia $AD=$ $=\pm\frac{a^2-b^2-c^2}{2c}$. Remiantis Pitagoro teorema,

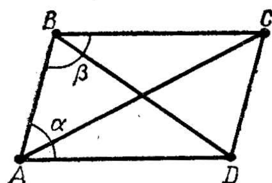
$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2c}\right)^2}.$$

Iš kosinusų teoremos išplaukia, kad ***lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai.*** Iš tikrųjų, sakykime, $ABCD$ — lygiagretainis (177 pav.). Trikampiams ABC ir ABD taikome kosinusų teoremą. Gauname:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\beta,$$
$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\alpha.$$

Kadangi $\cos\beta=-\cos\alpha$, $BC=AD$ ir $AB=$ $=CD$, tai, sudėję gautąsias lygybes, randame:

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$



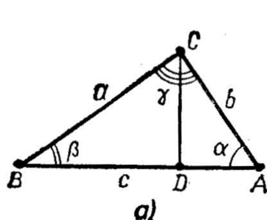
177 pav.

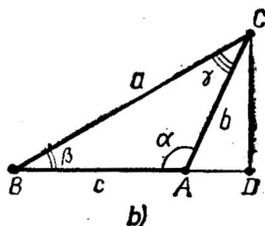
Tai ir reikėjo įrodyti.

11.2 teorema (sinusų teorema). ***Trikampio kraštinės proporcingos prieš jas esančių kampų sinusams.***

Įrodymas. Sakykime, ABC — trikampis, kurio kraštinės a, b, c, o prieš jas esantys kampai α, β, γ (178 pav.). Įrodysime, kad

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$$





178 pav.

Per viršūnę C išveskime aukštinę CD. Iš stačiojo trikampio ACD, kai kampas α smailus, gauname $CD=b\sin\alpha$ (178 pav., a). Jei kampas α bukas, tai $CD=b\sin(180°-\alpha)=b\sin\alpha$ (178 pav., b). Panašiai iš trikampio BCD randame $CD=a\sin\beta$. Taigi $a\sin\beta=$ $=b\sin\alpha$. Iš čia

$$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\alpha}{a}.$$

Panašiai gauname lygybę

$$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$$

Tam reikėtų iš trikampio viršūnės A išvesti aukštinę. Teorema įrodyta.

Uždavinys (10). Įrodykite, kad trikampio pusiaukampinė dalija prieš tą kampą esančią kraštinę į atkarpas, proporcingas prie jų esančioms kraštinėms.

Sprendimas. Sakykime, ABC — duotasis trikampis, BD — jo pusiaukampinė (179 pav.). Įrodysime, kad $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$.

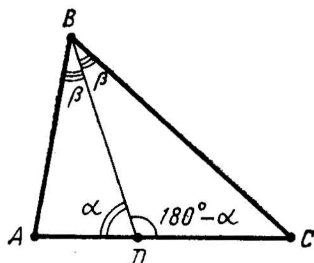
Trikampiams ABD ir CBD taikome sinusų teoremą:

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha},\quad \frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Pirmą lygybę padaliję iš antrosios, gauname:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}.$$

Tai ir reikėjo įrodyti.



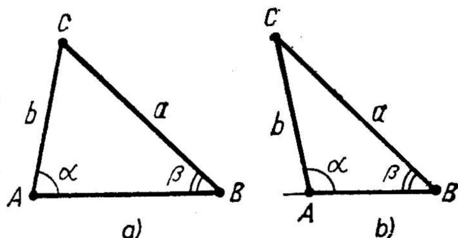
179 pav.

Iš sinusų teoremos išplaukia: jei trikampio kampai α, β susiję nelygybe $\alpha>\beta$, tai ir prieš juos esančios kraštinės susijusios nelygybe $a>b$. Atvirkščiai, jei $a>b$, tai $\alpha>\beta$. Kitaip sakant, ***trikampyje prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė, prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas.***

Iš tikrųjų, jei kampai α ir β yra smailieji (180 pav., *a*), tai iš $\alpha>\beta$ išplaukia $\sin\alpha>\sin\beta$. Kadangi

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b},$$

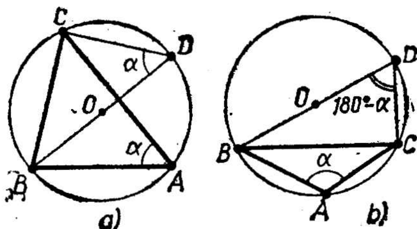
tai $a>b$. Jei kampas α yra bukas (abu kampai negali būti buki), tai kampas $180^\circ-\alpha$ yra smailus (180 pav., *b*). Be to, $180^\circ-\alpha$ didesnis už β, nes jis yra trikampio priekampis, negretutinis kampui β. Todėl $\sin\alpha=$ $=\sin(180^\circ-\alpha)>\sin\beta$. Ir šiuo atveju gauname, kad $a>b$ Atvirkščias teiginys įrodomas prieštaros metodu.



180 pav.

Uždavinys (11). Įrodykite, kad sinusų teoremoje kiekvienas iš trijų santykių $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$, $\frac{\sin\gamma}{c}$ lygus $\frac{1}{2R}$; R — apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulys.

Sprendimas. Nubrėžkime skersmenį BD (181 pav). Remiantis į apskritimą



181 pav.

įbrėžto kampo savybe, stačiojo trikampio BCD kampas prie viršūnės D lygus arba α, kai taškai A ir D yra vienoje pusėje nuo kraštinės BC (181 pav., *a*), arba $180°-\alpha$, kai tie taškai yra skirtingose pusėse nuo tiesės BC (181 pav., *b*). Pirmuoju atveju $BC = BD \sin \alpha$, antruoju — $BC = BD \sin(180° - \alpha)$. Kadangi $\sin(180°-\alpha) = \sin \alpha$, tai kiekvienu atveju $a = 2R \sin \alpha$. Vadinasi, $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{2R}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

TRIKAMPIŲ SPRENDIMAS

Trikampių sprendimas yra trikampio nežinomų kraštinių ir kampų radimas, kai žinomi kai kurie kampai ir kraštinės. Trikampio kraštines žymėsime a, b, c, prieš jas esančius kampus — α, β, γ.

I uždavinys. ***Duota trikampio kraštinė, pavyzdžiui a, ir du kampai, pavyzdžiui β ir γ. Reikia rasti trečią kampą ir kitas dvi kraštines.***

Sprendimo būdas. Kadangi trikampio kampų suma lygi 180°, tai, žinodami du kampus, galime rasti trečią kampą. Žinodami trikampio kraštinę ir visus tris kampus, taikysime sinusų teoremą ir rasime kitas dvi kraštines. Uždavinys visada turi vienintelį sprendinį. Žinoma, dviejų duotųjų kampų suma turi būti mažesnė už 180°. Sprendinio vienatis išplaukia iš antrojo trikampių lygumo požymio.

II uždavinys. ***Duotos trikampio dvi kraštinės, pavyzdžiui a ir b, ir kampas tarp jų γ. Reikia rasti kitus du kampus ir trečią kraštinę.***

Sprendimo būdas. Remdamiesi kosinusų teorema, randame kraštinę c. Taigi jau žinome tris kraštines. Taikant kosinusų teoremą, galima rasti kitų kampų kosinusus ir kampus. Tačiau paprasčiau taikyti sinusų teoremą ir rasti nežinomų kampų sinusus. Taip sprendžiant, reikia turėti galvoje, kad rastąją sinuso reikšmę atitiks du kampai. Todėl iš rastųjų kampų reikės išrinkti tuos, kurie tenkins žinomas sąlygas: trikampio kampų suma lygi 180°, prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas. Uždavinys visada turi vienintelį sprendinį. Sprendinio vienatis išplaukia iš pirmojo trikampių lygumo požymio.

III uždavinys. ***Duotos trikampio dvi kraštinės, pavyzdžiui a ir b, ir kampas, esantis prieš vieną jų, pavyzdžiui kampas α. Reikia rasti kitus du kampus ir trečią kraštinę.***

Sprendimo būdas. Remdamiesi sinusų teorema, randame sin β, po to — jį atitinkančius kampus β_1 ir β_2. Prisiminę, kad prieš didesnę iš kraštinių a ir b yra didesnis kampas, parenkame vieną iš gautųjų kampų β_1 ir β_2, arba abu. Žinodami kampus α ir β, apskaičiuojame kampą $\gamma=180°-\alpha-\beta$. Remdamiesi sinusų teorema, randame kraštinę c. Šis uždavinys ne toks, kaip du pirmieji: gali neturėti sprendinio, gali turėti vieną arba du sprendinius.

IV uždavinys. ***Duotos visos trikampio kraštinės. Reikia rasti trikampio kampus.***

Sprendimo būdas. Taikydami kosinusų teoremą, randame vieną trikampio kampą. Po to sprendžiame taip, kaip II uždavinį. Uždavinys turi sprendinį, jei didžiausia kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą. Sprendinio vienatis išplaukia iš trečiojo trikampio lygumo požymio.

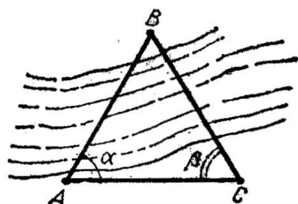
KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Suformuluokite ir įrodykite kosinusų teoremą.
2. Įrodykite, kad trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai „±“ dviguba sandauga vienos jų ir kitos kraštinės projekcijos joje. Kada rašome ženklą „+“, kada — ženklą „−“?
3. Įrodykite, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai.
4. Įrodykite sinusų teoremą.
5. Įrodykite, kad kiekviename trikampyje prieš didesnę kraštinę yra didesnis kampas ir prieš didesnį kampą yra didesnė kraštinė.
6. Duota trikampio kraštinė ir du kampai. Kaip rasti trečią trikampio kampą ir kitas dvi jo kraštines?
7. Duotos dvi trikampio kraštinės ir kampas tarp jų. Kaip rasti kitus du trikampio kampus ir trečią kraštinę?
8. Duotos dvi trikampio kraštinės ir kampas, esantis prieš vieną jų. Kaip rasti kitus du trikampio kampus ir trečią kraštinę?
9. Duotos visos trikampio kraštinės. Kaip rasti trikampio kampus?

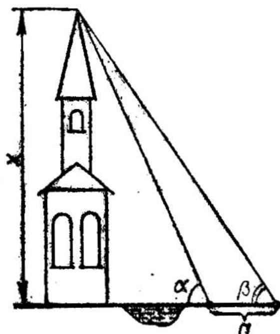
PRATIMAI

1. Duotos trikampio kraštinės a, b, c. Raskite trikampio aukštinę, išvestą į kraštinę c.
2. Duotos lygiagretainio įstrižainės c ir d bei kampas tarp jų α. Raskite lygiagretainio kraštines.

3. Duotos lygiagretainio kraštinės a ir b bei vienas jo kampas α. Raskite lygiagretainio įstrižaines.
4. Trikampio kraštinės a, b, c. Įrodykite Pitagoro teoremai atvirkštinę teoremą: jei $a^2+b^2=c^2$, tai trikampis yra statusis, jo status kampas yra prieš kraštinę c.
5. Trikampio kraštinės a, b, c. Jei $a^2+b^2>c^2$, tai prieš kraštinę c esantis kampas yra smailus; jei $a^2+b^2<c^2$, tai prieš kraštinę c esantis kampas yra bukas. Įrodykite.
6. Trikampio dvi kraštinės lygios 20 m ir 21 m, o kampo tarp jų sinusas lygus 0,6. Apskaičiuokite trečią trikampio kraštinę.
7. Trikampio kraštinės lygios 13 m, 14 m, 15 m. Raskite trikampio kampų kosinusus.
8. Duotos trikampio kraštinės a, b, c. Raskite į tas kraštines išvestas pusiaukraštines m_a, m_b, m_c.
9. Įrodykite, kad geometrinė taškų vieta, kurios kiekvieno taško atstumų nuo dviejų taškų kvadratų suma pastovi, yra apskritimas, kurio centras — duotuosius taškus jungiančios atkarpos vidurio taškas.
10. Įrodykite, kad trikampio pusiaukampinė dalija prieš tą kampą esančią kraštinę į atkarpas, proporcingas prie jų esančioms kraštinėms.
11. Įrodykite, kad sinusų teoremoje kiekvienas iš trijų santykių $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$, $\frac{\sin\gamma}{c}$ lygus $\frac{1}{2R}$; R — apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulys.
12. Dvi trikampio kraštinės lygios 5 cm ir 6 cm. Ar kampas, esantis prieš 5 cm kraštinę, gali būti bukas?



182 pav.



183 pav.

13. Trikampio ABC dvi kraštinės yra $AB=15$ cm, $AC=10$ cm. Ar gali būti $\sin B=\frac{3}{4}$?
14. Paaiškinkite, kaip rasti atstumą nuo taško A iki neprieinamo taško B (182 pav.), kai žinomas atstumas AC bei kampai α ir β.
15. Paaiškinkite, kaip rasti pastato (183 pav.) aukštį x, kai žinomi kampai α ir β bei atstumas a.
16. Iš trikampio ABC viršūnės C nubrėžta pusiaukampinė CD. Kraštinė AC didesnė už kraštinę BC. Katra atkarpa didesnė: AD ar BD?
17. Duotas trikampis ABC; CD — jo pusiaukampinė, nubrėžta į kraštinę AB. Jei kampas CAB didesnis už kampą CBA, tai AD mažesnė už BD. Įrodykite.

18. Trikampio ABC kampai tokie: $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. Kuri trikampio kraštinė yra didžiausia ir kuri mažiausia?

19. Trikampio ABC kraštinės tokios: $AB=5{,}1$ m, $BC=6{,}2$ m, $AC=7{,}3$ m. Kuris trikampio kampas yra didžiausias ir kuris mažiausias?

20. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo yra didesnis už 60°. Kas didesnis: to trikampio pagrindas ar šoninė kraštinė?

21. Trikampio ABC kampas C bukas; X — kraštinės AC taškas. Įrodykite, kad $BX<AB$.

22. Trikampio ABC kampas C bukas; X — kraštinės AC taškas, Y — kraštinės BC taškas. Įrodykite, kad $XY<AB$.

23. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D. Įrodykite, kad atkarpa CD yra trumpesnė bent už vieną iš kraštinių AC ir BC.

24. Duotas trikampis ABC; CD — pusiaukraštinė, nubrėžta į kraštinę AB. Jei $AC>BC$, tai kampas ACD mažesnis už kampą BCD. Įrodykite.

25. Iš trikampio viršūnės nubrėžtos pusiaukampinė, aukštinė ir pusiaukraštinė. Įrodykite, kad pusiaukampinė ne trumpesnė už jo aukštinę ir ne ilgesnė už pusiaukraštinę.

26. Kaip kinta trikampio ABC kraštinė AB, kai kampas C didėja, o kraštinės AC ir BC nesikeičia?

27. Duota trikampio kraštinė ir du kampai. Raskite trečią kampą ir kitas dvi kraštines, kai:

1) $a=5$, $\beta=30°$, $\gamma=45°$;
2) $a=20$, $\alpha=75°$, $\beta=60°$;
3) $a=35$, $\beta=40°$, $\gamma=120°$;
4) $b=12$, $\alpha=36°$, $\beta=25°$;
5) $c=14$, $\alpha=64°$, $\beta=48°$.

28. Duotos trikampio dvi kraštinės ir prieš trečią kraštinę esantis kampas. Raskite kitus du trikampio kampus ir trečią kraštinę, kai:

1) $a=12$, $b=8$, $\gamma=60°$;
2) $a=7$, $b=23$, $\gamma=130°$;
3) $b=9$, $c=17$, $\alpha=95°$;
4) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145°$;
5) $a=32$, $c=23$, $\beta=152°$;
6) $a=24$, $c=18$, $\beta=15°$.

29. Duotos dvi trikampio kraštinės a ir b bei kampas α, esantis prieš kraštinę a. Raskite kitus trikampio kampus ir kraštinę, kai:

1) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120°$;
2) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138°$;
3) $a=34$, $b=12$, $\alpha=164°$;
4) $a=2$, $b=4$, $\alpha=60°$;
5) $a=6$, $b=8$, $\alpha=30°$.

30. Duotos visos trikampio kraštinės. Raskite trikampio kampus, kai:

1) $a=2$, $b=3$, $c=4$;
2) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
3) $a=4$, $b=5$, $c=7$;
4) $a=15$, $b=24$, $c=18$;
5) $a=23$, $b=17$, $c=39$;
6) $a=55$, $b=21$, $c=38$.

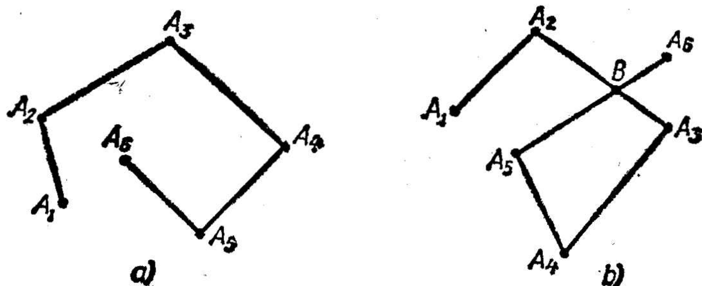
§ 12. DAUGIAKAMPIAI

LAUŽTĖ

Laužte $A_1A_2A_3\ldots A_n$ vadinama figūra, sudaryta iš taškų A_1, A_2, ..., A_n ir juos jungiančių atkarpų A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Taškai A_1, A_2, ..., A_n vadinami laužtės *viršūnėmis*, o atkarpos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — laužtės *grandimis*. Paprastąja laužte vadinama laužtė, neturinti savikirtos taškų. 184, *a*, paveiksle pavaizduota paprastoji laužte, o 184, *b*, paveiksle — laužtė su savikirtos tašku (B). *Laužtės ilgiu* vadinama jos grandžių ilgių suma.

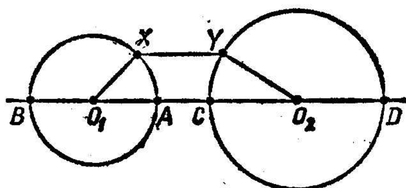
12.1 teorema. ***Laužtės ilgis ne mažesnis už jos galus jungiančios atkarpos ilgį.***

Įrodymas. Sakykime, $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — duotoji laužtė. Laužtės grandis A_1A_2 ir A_2A_3 pakeiskime viena grandimi A_1A_3. Gausime laužtę $A_1A_3A_4\ldots A_n$. Remiantis trikampio nelygybe, jos ilgis bus ne didesnis už pradinės laužtės ilgį. Grandis A_1A_3 ir A_3A_4 pakeitę grandimi A_1A_4, turėsime laužtę $A_1A_4A_5\ldots A_n$ ir t. t. Pagaliau gausime atkarpą A_1A_n, jungiančią nagrinėjamos laužtės galus. Iš to darysime išvadą: pradinės laužtės ilgis yra ne mažesnis už atkarpos A_1A_n ilgį. Teorema įrodyta.



184 pav.

U ž d a v i n y s (1). Duoti du apskritimai, kurių spinduliai R_1 ir R_2, atstumas tarp jų centrų $d>R_1+R_2$. Koks yra didžiausias ir koks mažiausias atstumas tarp tų apskritimų taškų X ir Y?



185 pav.

S p r e n d i m a s. Laužtei O_1XYO_2 taikome 12.1 teoremą. Gauname $O_1O_2 \leqslant O_1X+XY+YO_2$ (185 pav.). Vadinasi, $d \leqslant R_1+$ $+XY+R_2$. Iš čia $XY \geqslant d-R_1-R_2$.

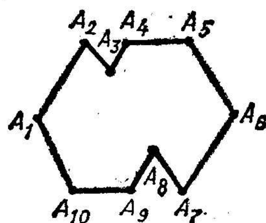
Pritaikę 12.1 teoremą laužtei XO_1O_2Y, gautume $XY \leqslant R_1+d+R_2$. Kadangi $BD=d+R_1+R_2$, tai didžiausias atstumas tarp apskritimų taškų lygus $d+R_1+R_2$.

IŠKILIEJI DAUGIAKAMPIAI

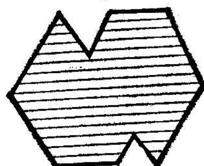
Uždarąja laužte vadinama laužtė, kurios galai sutampa. *Daugiakampiu* vadinama paprastoji uždara laužtė, kurios gretimos grandys nėra vienoje tiesėje (186 pav.). Laužtės viršūnės vadinamos *daugiakampio viršūnėmis*, o laužtės grandys — *daugiakampio kraštinėmis*. Atkarpos, jungiančios negretimas daugiakampio viršūnes, vadinamos *įstrižainėmis*. Daugiakampis, turintis n viršūnių, taigi ir n kraštinių, vadinamas n-kampiu.

Plokščiuoju daugiakampiu, arba daugiakampe sritimi, vadinama baigtinė plokštumos sritis, kurią riboja daugiakampis (187 pav.).

Iškiluoju daugiakampiu vadinamas daugiakampis, esantis vienoje pusplokštumėje nuo kiekvienos tiesės, kurioje yra jo kraštinė. Čia laikoma, kad ta tiesė yra pusplokštumėje. 188, *a*, paveiksle pavaizduotas iškilasis daugiakampis, o 188, *b*, paveiksle — neiškilasis. Iškilojo daugiakampio *kampu* prie viršūnės vadinamas kampas, kurį nusako iš tos viršūnės išeinančios daugiakampio kraštinės.

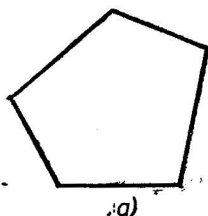


186 pav.

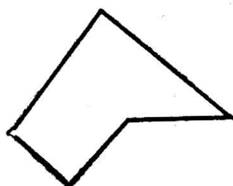

187 pav.

12.2 t e o r e m a. ***Iškilojo n-kampio kampų suma lygi*** $180°(n-2)$.

Į r o d y m a s. Sakykime, P yra duotas iškilasis daugiakampis $A_1A_2\ldots A_n$

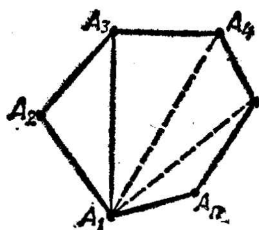


a)



b)

188 pav.



189 pav.

(189 pav.). Išveskime įstrižainę A_1A_3. Gausime trikampį $A_1A_2A_3$ ir daugiakampį $A_1A_3\ldots A_n$ (trumpiau P_1), turintį $n-1$ viršūnę. Daugiakampio P kampai prie viršūnių A_1 ir A_3 lygūs daugiakampio P_1 ir trikampio $A_1A_2A_3$ kampų prie tų viršūnių sumai. Iš čia išplaukia, kad daugiakampio P kampų suma lygi daugiakampio P_1 kampų sumai plius trikampio $A_1A_2A_3$ kampų suma, t. y. plius 180°. Paskui prieiname išvadą, kad daugiakampio P_1 kampų suma lygi daugiakampio $A_1A_4\ldots A_n$ (trumpiau P_2) kampų sumai plius 180°. Vadinasi, daugiakampio P kampų suma lygi daugiakampio P_2 kampų sumai plius $180°\cdot 2$.

Toliau taip darydami, $(n-3)$-čiuoju žingsniu gausime trikampį $A_1A_{n-1}A_n$. Jo kampų suma lygi 180°. Taigi daugiakampio P kampų suma lygi $180°(n-3)+180°=$ $=180°(n-2)$. Teorema įrodyta.

Iškilojo daugiakampio *priekampiu* prie daugiakampio viršūnės vadiname kampą, gretutinį daugiakampio kampui prie tos viršūnės.

U ž d a v i n y s (9). Kam lygi iškilojo n-kampio priekampių, paimtų po vieną prie kiekvienos viršūnės, suma?

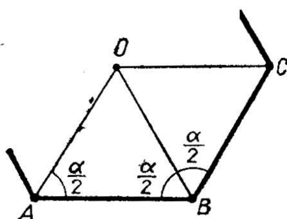
S p r e n d i m a s. Kampo ir jam gretutinio kampo suma lygi 180°. Todėl visų daugiakampio kampų ir visų priekampių (paimtų po vieną prie kiekvienos viršūnės) suma lygi $180°\cdot n$. Tačiau, remiantis 12.2 teorema, daugiakampio visų kampų suma lygi $180°(n-2)$. Vadinasi, priekampių, paimtų po vieną prie kiekvienos viršūnės, suma lygi $180°n-180°(n-2)=360°$.

TAISYKLINGIEJI DAUGIAKAMPIAI

Taisyklinguoju daugiakampiu vadinamas iškilasis daugiakampis, kurio visos kraštinės lygios ir visi kampai lygūs.

Įbrėžtu į apskritimą daugiakampiu (įbrėžtiniu daugiakampiu) vadinamas daugiakampis, kurio viršūnės yra viename apskritime. *Apibrėžtu* apie apskritimą daugiakampiu (apibrėžtiniu daugia-

kampiu) vadinamas daugiakampis, kurio visos kraštinės liečia vieną apskritimą.



190 pav.

12.3 teorema. ***Taisyklingasis iškilas daugiakampis yra įbrėžtinis ir apibrėžtinis daugiakampis.***

Įrodymas. Sakykime, A ir B — dvi gretimos daugiakampio viršūnės (190 pav.). Iš viršūnių A ir B išveskime daugiakampio kampų pusiaukampines. Sakykime, O — jų susikirtimo taškas. Trikampis AOB yra lygiašonis. Jo pagrindas AB, o kampai prie pagrindo lygūs $\frac{\alpha}{2}$ (α — daugiakampio kampas). Tašką O sujunkime su viršūnei B gretima viršūne C. Remiantis pirmuoju trikampių lygumo požymiu, trikampiai ABO ir CBO yra lygūs. Jų kraštinė OB bendra, kraštinės AB ir BC lygios kaip daugiakampio kraštinės, o kampai prie viršūnės B lygūs $\frac{\alpha}{2}$. Iš trikampių lygumo išplaukia, kad trikampis OBC yra lygiašonis, o jo kampas prie viršūnės C lygus $\frac{\alpha}{2}$. Vadinasi, CO yra daugiakampio kampo C pusiaukampinė.

Tašką O sujungę su viršūnei C gretima viršūne D, įrodytume, kad trikampis COD yra lygiašonis, o DO — daugiakampio kampo D pusiaukampinė. Ir taip toliau. Išaiškės, kad kiekvienas trikampis, kurio viena kraštinė yra daugiakampio kraštinė, o prieš ją esanti viršūnė — taškas O, yra lygiašonis. Tų visų trikampių šoninės kraštinės yra lygios. Iš to išplaukia, kad visos daugiakampio viršūnės yra apskritime, kurio centras O ir spindulys lygus tų trikampių šoninėms kraštinėms. Visos daugiakampio kraštinės liečia apskritimą, kurio centras O ir spindulys lygus trikampių aukštinėms, išvestoms iš viršūnės O. Teorema įrodyta.

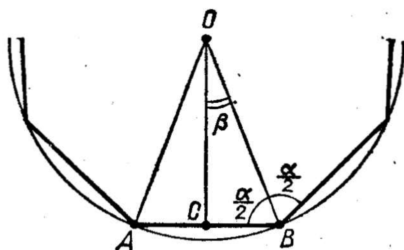
Sakykime, *taisyklingojo daugiakampio kraštinė lygi a, o kraštinių skaičius n* (191 pav.). *Rasime apibrėžtinio apskritimo spindulį R ir įbrėžtinio apskritimo spindulį r:*

$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{(n-2)\,180°}{2n} = \frac{180°}{n};$$

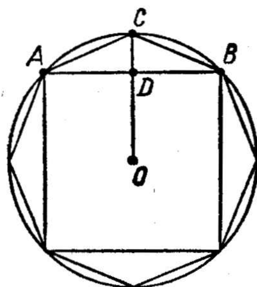
$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}; \quad r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Taisyklingojo (lygiakraščio) trikampio atveju $n = 3, \frac{180°}{3} = 60°$,

$$R = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 60°} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$



191 pav.



192 pav.

Taisyklingojo keturkampio (kvadrato) atveju $n=4$, $\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 45^\circ}=\frac{a}{\sqrt{2}}; \quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg} 45^\circ}=\frac{a}{2}.$$

Taisyklingojo šešiakampio atveju $n=6$, $\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$,

$$R=\frac{a}{2\sin 30^\circ}=a; \quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg} 30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Uždavinys (23). Įrodykite, kad taisyklingojo aštuoniakampio kraštinę galima apskaičiuoti, remiantis formule $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (R — apibrėžtinio apskritimo spindulys).

Sprendimas. Sakykime, AB — įbrėžtinio kvadrato kraštinė, AC — aštuoniakampio kraštinė (192 pav.). Tada $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}$, $AD=\frac{AB}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $CD=OC-OD=R-\frac{R\sqrt{2}}{2}$,

todėl

$$a=AC=\sqrt{\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(R-R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

APSKRITIMO ILGIS

Apskritimo ilgį nesunku įsivaizduoti taip. Apskritimo formos siūlą perkirpkime ir paėmę už galų ištieskime. Gautosios atkarpos ilgis ir yra apskritimo ilgis. Kaip galima rasti apskritimo ilgį, žinant apskritimo spindulį? Vaizdžiai samprotaudami, įsitikiname, kad apskritimo ilgis kiek norima mažai skiriasi nuo įbrėžto į jį

taisyklingojo daugiakampio perimetro, kai daugiakampio kraštinės yra pakankamai mažos. Šituo remdamiesi, įrodysime kai kurias apskritimo ilgio savybes.

12.4 teorema. ***Apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis nepriklauso nuo apskritimo, t. y. tas santykis yra vienodas, kad ir kokie būtų du apskritimai.***

Įrodymas. Tarkime, kad apskritimų, kurių spinduliai R_1 ir R_2, o ilgiai l_1 ir l_2, minėti santykiai nelygūs, t. y. $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, pavyzdžiui,

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Į pasirinktuosius apskritimus įbrėžkime taisyklinguosius daugiakampius, kurių kraštinių skaičius n didelis.

Jei n labai didelis, tai nagrinėjamų apskritimų ilgiai l_1 ir l_2 labai mažai skirsis nuo įbrėžtinių daugiakampių perimetrų p_1 ir p_2, o nelygybė (*) virs nelygybe

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}, \qquad (**)$$

kurią gautume iš nelygybės (*), kai l_1 pakeistume p_1, o l_2 — p_2.

Perimetrus p_1 ir p_2 išreikškime apskritimų spinduliais. Iš formulės

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

(apie taisyklingąjį daugiakampį apibrėžto apskritimo spinduliui reikšti) išplaukia, kad įbrėžtinių daugiakampių kraštinės lygios

$$2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ ir } 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n},$$

o daugiakampių perimetrai $p_1 = 2R_1 n \sin \frac{180^\circ}{n}$ ir $p_2 = 2R_2 n \times \sin \frac{180^\circ}{n}$. Iš čia $\frac{p_1}{2R_1} = n \sin \frac{180^\circ}{n}$, $\frac{p_2}{2R_2} = n \sin \frac{180^\circ}{n}$, t. y. $\frac{p_1}{2R_1} = \frac{p_2}{2R_2}$.

Tai prieštarauja nelygybei (**). Teorema įrodyta.

Apskritimo ilgio ir skersmens santykį įprasta žymėti graikiška raide π (skaitoma „pi"):

$$\frac{l}{2R}=\pi.$$

π — iracionalusis skaičius. Jo artinys

$$\pi\approx 3{,}1416.$$

Taigi *formulė apskritimo ilgiui apskaičiuoti tokia:*

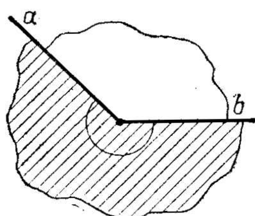
$$l=2\pi R.$$

CENTRINIS KAMPAS IR APSKRITIMO LANKAS

Kampas plokštumą padalija į dvi dalis. Kiekviena tų dalių vadinama *plokščiuoju kampu.* 193 paveiksle subrūkšniuotas vienas plokščiasis kampas, kurio kraštinės a ir b. Plokštieji kampai, turintys bendras kraštines, vadinami *papildomaisiais kampais.*

Jei plokščiasis kampas yra pusplokštumės dalis, tai jo laipsniniu matu vadinamas įprastinio kampo, turinčio tas pačias kraštines, laipsninis matas. Jei pusplokštumė yra plokščiajame kampe, tai jos laipsninis matas lygus $360°-\alpha$; čia α — papildomo plokščiojo kampo matas.

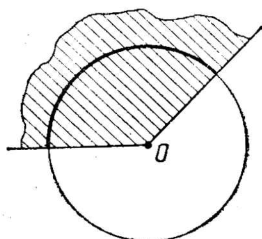
Apskritimo *centriniu kampu* vadinamas plokščiasis kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras. Apskritimo dalis, esanti plokščiojo kampo viduje, vadinama *apskritimo lanku,* atitinkančiu tą centrinį kampą (194 pav.). Apskritimo lanko laipsniniu matu vadinamas atitinkamo centrinio kampo laipsninis matas.



193 pav.

Rasime ilgį apskritimo lanko, atitinkančio $n°$ centrinį kampą. Ištiestinį kampą atitinka pusapskritiminis; jo ilgis πR. Vadinasi, 1° kampą atitinka lankas, kurio ilgis $\frac{\pi R}{180}$, o $n°$ kampą atitinka lankas, kurio ilgis

$$l=\frac{\pi R}{180}n.$$



194 pav.

Kampo radianiniu matu vadinamas jį atitinkančio lanko ilgio ir apskritimo spin-

dulio santykis. Iš formulės apskritimo lanko ilgiui apskaičiuoti išeina, kad

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi}{180}\cdot n,$$

t. y. kad *kampo radianinis matas lygus jo laipsniniam matui, padaugintam iš* $\frac{\pi}{180}$. Atskiru atveju 180° kampo radianinis matas yra π, stačiojo kampo radianinis matas lygus $\frac{\pi}{2}$.

Kampų radianinio mato vienetas yra *radianas*. Vieno radiano kampas — kampas, kurio lanko ilgis lygus spinduliui. Vieno radiano kampo laipsninis matas lygus $\frac{180°}{\pi}\approx 57°$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kas yra laužtė, laužtės ilgis?
2. Įrodykite, kad laužtės ilgis ne mažesnis už jos galus jungiančios atkarpos ilgį.
3. Kas yra daugiakampis, iškilasis daugiakampis?
4. Kas yra iškilojo daugiakampio kampas prie viršūnės?
5. Kas yra iškilojo daugiakampio priekampis?
6. Išveskite iškilojo daugiakampio kampų sumos formulę.
7. Įrodykite, kad taisyklingasis daugiakampis yra įbrėžtinis ir apibrėžtinis daugiakampis.
8. Išveskite formules įbrėžto į taisyklingąjį n-kampį ir apibrėžto apie jį apskritimų spinduliams apskaičiuoti.
9. Raskite įbrėžto į taisyklingąjį trikampį, kvadratą ir taisyklingąjį šešiakampį bei apibrėžtų apie juos apskritimų spindulius.
10. Įrodykite, kad apskritimo ilgio ir jo skersmens santykis nepriklauso nuo apskritimo, t. y. visų apskritimų jis vienodas.
11. Kokia formulė taikoma apskritimo ilgiui apskaičiuoti?
12. Kas yra plokščiasis kampas?
13. Kas yra centrinis kampas?
14. Kas yra apskritimo lankas, atitinkantis duotą centrinį kampą?
15. Kokia formulė taikoma apskritimo lanko ilgiui apskaičiuoti?
16. Kas yra kampo radianinis matas?
17. Kokie yra 180° ir 90° kampų radianiniai matai?

PRATIMAI

1. Duoti du apskritimai, kurių spinduliai R_1 ir R_2, atstumas tarp jų centrų $d>R_1+R_2$. Koks yra didžiausias ir koks mažiausias atstumas tarp tų apskritimų taškų X ir Y?
2. Išspręskite 1 uždavinį tuo atveju, kai $d<R_1-R_2$.
3. Įrodykite: jei laužtės viršūnės nėra vienoje tiesėje, tai jos ilgis didesnis už laužtės galus jungiančios atkarpos ilgį.

4. Įrodykite, kad atstumas tarp bet kurių dviejų uždarosios laužtės viršūnių ne didesnis už pusę laužtės ilgio.
5. Įrodykite, kad uždarosios laužtės kiekvienos grandies ilgis ne didesnis už kitų grandžių ilgių sumą.
6. Ar yra laužtė, kurios grandžių ilgiai būtų 1 m, 2 m, 3 m, 4 m, 11 m? Pagrįskite atsakymą.
7. Įrodykite : jei laužtės galai yra skirtingose tiesės pusėse, tai laužtė kerta tiesę.
8. Kiek įstrižainių turi n-kampis?
9. Kam lygi iškilojo n-kampio priekampių, paimtų po vieną prie kiekvienos viršūnės, suma?
10. Iškilojo keturkampio kampai proporcingi skaičiams 1, 2, 3, 4. Raskite tuos kampus.
11. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio kiekvienas kampas lygus: 1) 135°; 2) 150°?
12. Kiek kraštinių turi taisyklingasis daugiakampis, kurio kiekvienas priekampis lygus: 1) 36°; 2) 24°?
13. Įrodykite, kad kas antra taisyklingojo $2n$-kampio viršūnė yra taisyklingojo n-kampio viršūnė.
14. Įrodykite, kad taisyklingojo n-kampio kraštinių vidurio taškai yra kito taisyklingojo n-kampio viršūnės.
15. Įrodykite, kad taisyklingieji n-kampiai, kurių kraštinės lygios, yra lygūs, t. y. jie gali būti sutapdinti judesiu.
16. Įrodykite, kad taisyklingieji n-kampiai yra panašūs, t. y. panašumo transformacija vieną galima pervesti į kitą.
17. Įrodykite, kad apskritimo spinduliui statmena styga, einanti per jo vidurio tašką, lygi į apskritimą įbrėžto taisyklingojo trikampio kraštinei.
18. Į taisyklingąjį trikampį įbrėžtas ir apie jį apibrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad įbrėžtinio apskritimo spindulys du kartus trumpesnis už apibrėžtinio apskritimo spindulį.
19. Įbrėžto į apskritimą taisyklingojo trikampio kraštinė lygi a. Raskite į tą apskritimą įbrėžto kvadrato kraštinę.
20. Į apskritimą, kurio spindulys 4 dm, įbrėžtas taisyklingasis trikampis, po to nubraižytas kvadratas, kurio kraštinė lygi trikampio kraštinei. Raskite apie kvadratą apibrėžto apskritimo spindulį.
21. Velenėlio skersmuo 4 cm. Jo galas nudildytas, padarytas kvadratinis. Koks gali būti didžiausias kvadrato kraštinės ilgis?
22. Dujų sklendės sraigto galas yra taisyklingasis trisienis *. Sraigto cilindrinės dalies skersmuo lygus 2 cm. Koks gali būti didžiausias kiekvienos sienos matmuo?
23. Įrodykite, kad taisyklingojo aštuoniakampio kraštinę galima apskaičiuoti, remiantis formule $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (R — apibrėžtinio apskritimo spindulys).
24. Įrodykite, kad taisyklingojo dvylikakampio kraštinę galima

---

* Žiūrėdami iš galo, matytume taisyklingąjį trikampį, įbrėžtą į apskritimą. (*Vert.*)

apskaičiuoti, remiantis formule $a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (R — apibrėžtinio apskritimo spindulys).

25. Apskritimo spindulys lygus R. Raskite į jį įbrėžtų taisyklingojo penkiakampio ir dešimčiakampio kraštines.

26. Taisyklingojo daugiakampio kraštinė lygi a, o apibrėžto apie jį apskritimo spindulys lygus R. Raskite įbrėžto į jį apskritimo spindulį.

27. Taisyklingojo daugiakampio kraštinė lygi a, o į jį įbrėžto apskritimo spindulys r. Raskite apie jį apibrėžto apskritimo spindulį.

28. Apskritimo spindulys R, apie jį apibrėžto taisyklingojo daugiakampio kraštinė b, o įbrėžto į jį taisyklingojo daugiakampio, turinčio tiek pat kraštinių, kraštinė a. Kraštinę b išreikškite spinduliu R ir kraštine a.

29. Apskritimo spindulys R, įbrėžto į jį taisyklingojo daugiakampio kraštinė a, o apibrėžto apie jį taisyklingojo daugiakampio, turinčio tiek pat kraštinių, kraštinė b. Kraštinę a išreikškite spinduliu R ir kraštine b.

30. Į apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį dvylikakampį.

31. Apie apskritimą apibrėžkite taisyklingąjį aštuoniakampį.

32. Apskaičiuokite apskritimo ilgį, kai jo spindulys lygus: 1) 10 m; 2) 15 m.

33. Kiek pasikeis apskritimo ilgis, jo spindulį pakeitus 1 mm?

34. Raskite į apskritimą įbrėžto taisyklingojo aštuoniakampio perimetro ir apskritimo skersmens santykį, jį palyginkite su π artiniu.

35. Išspręskite 34 uždavinį, aštuoniakampį pakeitę dvylikakampiu.

36. Laikydami, kad 1 m sudaro vieną 40-milijonąją Žemės pusiaujo ilgio dalį, raskite Žemės rutulio spindulį.

37. Kiek pailgėtų Žemės pusiaujas, jei Žemės rutulio spindulys padidėtų 1 cm?

38. Apskritimo spindulys lygus R. Jo viduje yra n lygių apskritimų, liečiančių tą apskritimą ir vienas kitą. Raskite tų apskritimų spindulį, kai jų skaičius n lygus: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

39. Išspręskite panašų į 38 uždavinį, kai apskritimai yra duotojo apskritimo išorėje.

40. Skriemulys, kurio skersmuo 1,4 m, per minutę apsisuka 80 kartų. Raskite skriemulio apskritimo taško greitį.

41. Raskite papildomuosius plokščiuosius kampus, kurių: 1) vienas 5 kartus didesnis už kitą; 2) vienas 100° didesnis už kitą; 3) skirtumas lygus 20°.

42. Koks yra centrinio kampo laipsninis matas, kai jį atitinkantis lankas sudaro tokią apskritimo dalį: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$?

43. Kokį kampą sudaro Žemės spinduliai, išvesti į du jos pavir-

šiaus taškus, nuotolis tarp kurių lygus 1 km? Žemės spindulys lygus 6 370 km.

44. Apskritimo spindulys $R=1$ m. Raskite lanko ilgį, kai lankas atitinka: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45′; 5) 60°30′; 6) 150°36′ centrinį kampą.

45. Stygos ilgis lygus a. Raskite jos lanko ilgį, kai lankas atitinka tokį centrinį kampą: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

46. Lanko ilgis lygus l. Raskite jo stygą, kai lanko laipsninis matas yra: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

47. Raskite šių kampų radianinį matą: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

§ 13. FIGŪRŲ PLOTAI

PLOTO SĄVOKA

Figūrų plotų radimo uždavinys yra labai senas. Jis iškilo žmonių praktinėje veikloje.

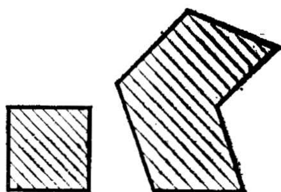
Įsivaizduokime du žemės sklypus: vieną — kvadratinį, kitą — bet kokios formos (195 pav.). Sakykime, abu sklypai tolygiai apsėjami, pavyzdžiui, kviečiais. Tai reiškia, kad lygioms sklypo dalims tenka tiek pat grūdų. Tarkime, kad pirmam sklypui apsėti reikėjo m kg grūdų, o antrajam — n kg grūdų. Natūralu laikyti, kad antras sklypas $\frac{n}{m}$ kartų didesnis už pirmąjį. Skaičių, kuris parodo, kiek kartų antras sklypas yra didesnis už pirmąjį, vadinsime antro sklypo plotu. Tokiu atveju pirmas sklypas yra ploto matavimo vienetas. Iš pateiktojo ploto sąvokos apibrėžimo išplaukia tokios jo savybės.

Pirma, kadangi kiekvienam sklypui apsėti reikia tam tikro kiekio grūdų, tai kiekvienas sklypas turi tam tikrą plotą.

Antra, lygiems sklypams apsėti reikia to paties kiekio grūdų, todėl lygių sklypų plotai yra lygūs.

Trečia, jei sklypą padalysime į dvi dalis, tai grūdų kiekį visam sklypui apsėti sudarys grūdų kiekis jo dalims apsėti. Todėl viso sklypo plotas lygus jo dalių plotų sumai.

Dabar gausime formules kai kurių paprastųjų figūrų plotams apskaičiuoti. *Paprastąja figūra* vadinsime figūrą, kurią galima padalyti į baigtinį skaičių trikampių (trikampių sričių).



195 pav.

Gaudami tas formules, remsimės jau minėtomis ploto savybėmis, t. y. laikysime, kad:

1) kai turimas ploto vienetas, kiekviena paprastoji figūra turi tam tikrą plotą;

2) lygių figūrų plotai yra lygūs;

3) jei paprastoji figūra yra padalyta į keletą paprastųjų figūrų, tai tos figūros plotas lygus jos dalių plotų sumai.

Kalbėdami apie trikampio, lygiagretainio, trapecijos bei daugiakampio apskritai plotą, turėsime galvoje jų apribotų sričių, t. y. atitinkamų plokščiųjų daugiakampių, plotus.

STAČIAKAMPIO PLOTAS

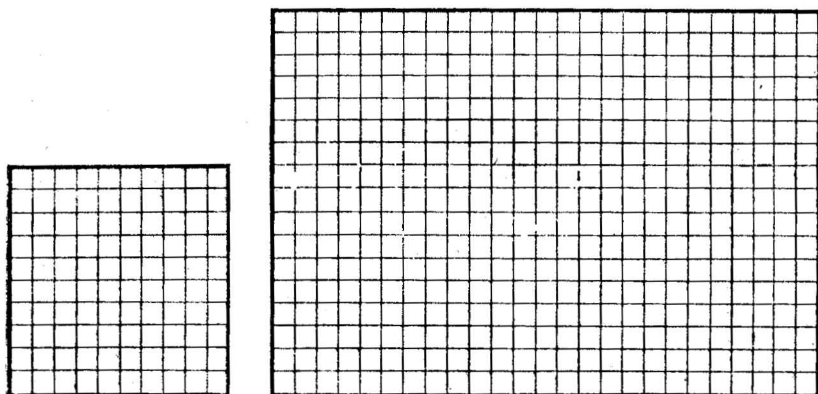
Rasime stačiakampio plotą. 196 paveiksle pavaizduotas kvadratas, kurį laikysime ploto matavimo vienetu, ir stačiakampis, kurio plotą reikia išmatuoti. Kvadrato kraštinė yra ilgio matavimo vienetas.

Iš pradžių išnagrinėsime atvejį, kai stačiakampio kraštinių ilgiai a ir b yra išreikšti baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis ir dešimtainių ženklų po kablelio skaičius ne didesnis už n.

Kvadrato kraštines padalykime į 10^n lygių dalių ir dalijimo taškus išveskime jo kraštinėms lygiagrečias tieses. Tuo kvadratą padalysime į $10^n \cdot 10^n$ mažų kvadratų. Paveiksle kvadrato kraštinė padalyta į 10 dalių. Mažųjų kvadratų skaičius lygus 100 $(10 \cdot 10 = 100)$.

Rasime mažojo kvadrato plotą. Remiantis ploto savybe, didžiojo kvadrato plotas lygus mažųjų kvadratų plotų sumai. Kadangi didžiojo kvadrato plotas lygus vienetui, o mažųjų kvadratų skaičius lygus 10^{2n}, tai mažojo kvadrato plotas lygus $\frac{1}{10^{2n}}$.

Kadangi $a : \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ ir $b : \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ yra sveikieji skaičiai, tai stačiakampio kraštines galima padalyti į sveiką skaičių



196 pav.

dalių, lygių $\frac{1}{10^n}$. Kraštinėje a tokių dalių bus $a \cdot 10^n$, o kraštinėje b — $b \cdot 10^n$. Per dalijimo taškus išveskime stačiakampio kraštinėms lygiagrečias tieses. Tuo stačiakampį padalysime į mažus kvadratus, kurių kraštinė lygi $\frac{1}{10^n}$. Tų kvadratų skaičius bus $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n$. Stačiakampio plotas lygus jame esančių mažųjų kvadratų plotų sumai. Kadangi mažojo kvadrato plotas lygus $\frac{1}{10^{2n}}$, o jų skaičius lygus $ab \cdot 10^{2n}$, tai stačiakampio plotas lygus $ab \cdot 10^{2n} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = ab$.

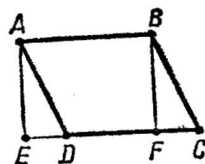
Dabar tarkime, kad bent viena stačiakampio kraštinė, a arba b, išreikšta begaline dešimtaine trupmena. Skaičiaus a artinius su trūkumu ir su pertekliumi n dešimtainių ženklų tikslumu pažymėkime a_1 ir a_2. Skaičiaus b artinius tuo pačiu tikslumu pažymėkime b_1 ir b_2. Stačiakampio, kurio kraštinės a_1 ir b_1, plotas mažesnis už nagrinėjamojo stačiakampio plotą, nes jis telpa nagrinėjamojo stačiakampio viduje. Stačiakampio, kurio kraštinės a_2 ir b_2, plotas didesnis už nagrinėjamojo stačiakampio plotą, nes nagrinėjamasis stačiakampis telpa jo viduje. Jau įrodėme, kad stačiakampio, kurio kraštinės a_1 ir b_1, plotas lygus a_1b_1, o stačiakampio, kurio kraštinės a_2 ir b_2, plotas lygus a_2b_2. Taigi nagrinėjamojo stačiakampio plotas S yra tarp a_1b_1 ir a_2b_2. Kadangi a_1b_1 ir a_2b_2 yra ab artiniai bet kuriuo iš anksto pasirinktu tikslumu (kai n — pakankamai didelis), tai $S=ab$. Taigi *formulė* ***stačiakampio plotui apskaičiuoti tokia: $S=ab$.***

PAPRASČIAUSIŲ FIGŪRŲ PLOTAI

Rasime lygiagretainio plotą. Sakykime, $ABCD$ — nagrinėjamasis lygiagretainis (197 pav.). Jei jis yra ne stačiakampis, tai vienas jo kampas, A arba B, yra smailus. Sakykime, kaip ir pavaizduota 197 paveiksle, kampas A yra smailus. Iš viršūnės A nubrėžkime statmenį AE į tiesę CD. Trapecijos $ABCE$ plotas lygus lygiagretainio $ABCD$ ir trikampio ADE plotų sumai.

Iš viršūnės B nubrėžkime statmenį BF į tiesę CD. Tada trapecijos $ABCE$ plotas bus lygus stačiakampio $ABFE$ ir trikampio BCF plotų sumai. Statieji trikampiai ADE ir BCF lygūs, todėl jų plotai lygūs. Iš čia išeina, kad lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus stačiakampio $ABFE$ plotui, t. y. $AB \cdot BF$. Atkarpa

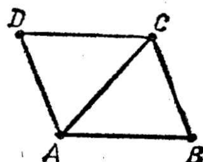
BF vadinama lygiagretainio *aukštine*, atitinkančia kraštines *AB* ir *CD*.



197 pav.

Taigi ***lygiagretainio plotas lygus lygiagretainio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai.***

Rasime trikampio plotą. Sakykime, *ABC* — nagrinėjamasis trikampis (198 pav.). Kaip parodyta paveiksle, tą trikampį papildykime iki lygiagretainio *ABCD*. Lygiagretainio plotas lygus trikampių *ABC* ir *CDA* plotų sumai. Kadangi tie trikampiai lygūs, tai lygiagretainio plotas lygus dvigubam trikampio *ABC* plotui. Lygiagretainio aukštinė, atitinkanti kraštinę *AB*, lygi trikampio *ABC* aukštinei, nubrėžtai į kraštinę *AB*.



198 pav.

Iš čia išeina, kad ***trikampio plotas lygus pusės trikampio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai.***

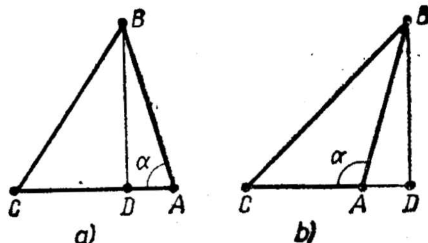
Uždavinys (26). Įrodykite, kad trikampio *ABC* plotui apskaičiuoti galima taikyti tokią formulę: $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$.

Sprendimas. Išveskime trikampio *ABC* aukštinę *BD* (199 pav.). Tada $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Iš stačiojo trikampio *ABD* randame *BD*: $BD=AB\cdot\sin\alpha$, jei kampas α smailus (199 pav., *a*), $BD=AB\sin(180°-\alpha)$, jei kampas α bukas (199 pav., *b*). Kadangi $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, tai abiem atvejais $BD=AB\sin\alpha$. Vadinasi, trikampio plotas $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A$.

Uždavinys (33). Išveskite Herono* formulę trikampio plotui apskaičiuoti:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

a, *b*, *c* — trikampio kraštinių ilgiai, *p* — trikampio pusperimetris.



199 pav.

Sprendimas. Žinome, kad

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

* Heronas Aleksandrietis — senovės graikų mokslininkas, gyvenęs I a.

γ — trikampio kampas, esantis prieš kraštinę c. Remiantis kosinusų teorema,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Iš čia

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=$$

$$=\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=$$

$$=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Kadangi $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $c-a+$ $+b=2p-2a$, tai

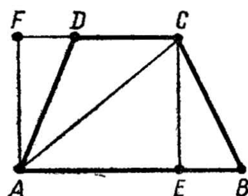
$$\sin\gamma=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

o trikampio plotas

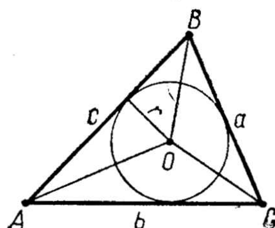
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Rasime trapecijos plotą. Sakykime, $ABCD$ — duotoji trapecija (200 pav.). Trapecijos įstrižainė AC trapeciją dalija į du trikampius: ABC ir CDA. Vadinasi, trapecijos plotas lygus tų trikampių plotų sumai. Trikampio ABC plotas lygus $\frac{1}{2}AB\cdot CE$, trikampio ACD plotas lygus $\frac{1}{2}DC\cdot AF$. Tų trikampių aukštinės CE ir AF lygios atstumui tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD. Tas atstumas vadinamas trapecijos *aukštine.*

Vadinasi, ***trapecijos plotas lygus jos pagrindų sumos pusės ir aukštinės sandaugai.***



200 pav.



201 pav.

Uždavinys (36). Išveskite šias formules apibrėžto apie trikampį apskritimo spinduliui (R) ir į jį įbrėžto apskritimo spinduliui (r) apskaičiuoti:

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{2S}{a+b+c};$$

a, b, c — trikampio kraštinės, S — trikampio plotas.

Sprendimas. Išvesime pirmąją formulę. Žinome, kad $R=$ $=\frac{a}{2\sin\alpha}$ (α — prieš kraštinę a esantis trikampio kampas; § 11, 11 uždavinys).

Dešinėje pusėje esančios trupmenos skaitiklį ir vardiklį padauginę iš bc ir prisiminę, kad $\frac{1}{2}bc\sin\alpha=S$, gauname: $R=\frac{abc}{4S}$.

Išvesime antrąją formulę (201 pav.). Trikampio ABC plotas lygus trikampių OAB, OBC ir OCA plotų sumai:

$$S=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br.$$

Iš čia

$$r=\frac{2S}{a+b+c}.$$

PANAŠIŲJŲ FIGŪRŲ PLOTAI

Sakykime, F_1 ir F_2 — dvi panašios paprastosios figūros. Rasime tų figūrų plotų santykį. Kadangi figūros panašios, yra panašumo transformacija, kuria figūra F_1 pervedama į figūrą F_2.

Figūrą F_1 padalykime į trikampius Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 .... Panašumo transformacija, kuri figūrą F_1 perveda į figūrą F_2, tuos trikampius perveda į trikampius Δ''_1, Δ''_2, Δ''_3, ...; į juos bus padalyta figūra F_2. Figūros F_1 plotas lygus trikampių Δ'_1, Δ'_2, ... plotų sumai, o figūros F_2 plotas lygus trikampių Δ''_1, Δ''_2, ... plotų sumai.

Jei panašumo koeficientas lygus k, tai trikampio Δ''_n matmenys yra k kartų didesni už atitinkamus trikampio Δ'_n matmenis. Atskiru atveju, trikampio Δ''_n kraštinės ir aukštinės bus k kartų didesnės už atitinkamas trikampio Δ'_n kraštines ir aukštines. Iš čia išplaukia, kad $S(\Delta''_n)=k^2S(\Delta'_n)$. Tas lygybes panariui sudėję, gausime:

$$S(F_2)=k^2S(F_1).$$

Panašumo koeficientas k lygus figūrų F_2 ir F_1 atitinkamų matmenų santykiui. Todėl ***panašiųjų figūrų plotų santykis lygus jų atitinkamų matmenų santykio kvadratui.***

SKRITULIO PLOTAS

Skrituliu vadinama figūra, sudaryta iš visų tų plokštumos taškų, kurių kiekvieno atstumas nuo vieno plokštumos taško yra ne didesnis už kurį nors atstumą. Tas taškas vadinamas *skritulio centru*, o atstumas — *skritulio spinduliu.* Skritulio kraštas yra apskritimas, kurio centras ir spindulys tie patys, kaip ir skritulio centras ir spindulys. Išvesime formulę skritulio plotui apskaičiuoti.

Iš pradžių įrodysime, kad *apie skritulį apibrėžto iškilojo daugiakampio plotui apskaičiuoti galima taikyti formulę*

$$S=\frac{pr}{2};$$

čia p — daugiakampio perimetras, t. y. daugiakampio kraštinių ilgių suma, r — skritulio spindulys.

Skritulio centrą atkarpomis sujunkime su daugiakampio viršūnėmis (202 pav.). Jos padalys daugiakampį į trikampius A_1OA_2, A_2OA_3, ... Daugiakampio plotas lygus trikampių plotų sumai. Apskaičiuojame trikampių plotus:

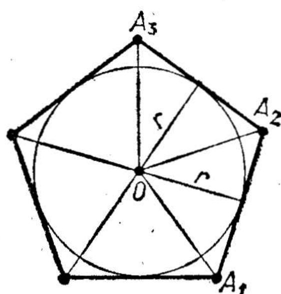
$$S(A_1OA_2)=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot r,\ S(A_2OA_3)=\frac{1}{2}A_2A_3\cdot r,\ \ldots.$$

Sudėję trikampių plotus, gauname daugiakampio plotą:

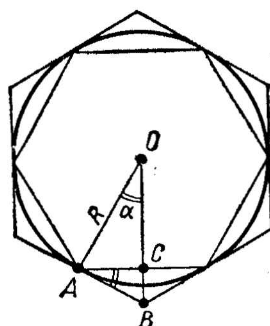
$$S=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot r+\frac{1}{2}A_2A_3\cdot r+\ldots=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_2A_3+\ldots)r.$$

Skliaustuose yra daugiakampio perimetras. Formulė išvesta.

Dabar rasime skritulio, kurio spindulys R, plotą S. Apie skritulį apibrėžkime taisyklingąjį n-kampį P_1 ir į skritulį įbrėžkime taisyklingąjį n-kampį P_2 (203 pav.). Skritulys yra daugiakampyje P_1, todėl daugiakampio P_1 plotas didesnis už skritulio plotą.



202 pav.



203 pav.

Daugiakampis P_2 yra skritulyje, todėl daugiakampio P_2 plotas mažesnis už skritulio plotą. Daugiakampių P_1 ir P_2 plotai tokie:

$$S_1=\frac{1}{2}p_1R, \quad S_2=\frac{1}{2}p_2r;$$

čia r — į daugiakampį P_2 įbrėžto apskritimo spindulys, p_1 ir p_2 — daugiakampių P_1 ir P_2 perimetrai.

Sakykime, b ir a — daugiakampių P_1 ir P_2 kraštinės. Iš trikampio ACB (203 pav.) gauname:

$$AB=\frac{AC}{\cos\alpha}, \text{ arba } \frac{b}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}; \text{ čia } \alpha=\angle BAC=\frac{180^\circ}{n}.$$

Iš čia $nb=\frac{na}{\cos\alpha}$, t. y. $p_1=\frac{p_2}{\cos\alpha}$. Iš trikampio AOC gauname: $r=OC=R\cos\alpha$. Taigi

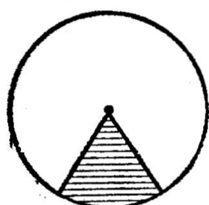
$$S_1=\frac{1}{2}p_2\frac{R}{\cos\alpha}, \quad S_2=\frac{1}{2}p_2R\cos\alpha.$$

Kai n yra pakankamai didelis, perimetras p_2 kiek norima mažai skiriasi nuo skritulio apskritimo ilgio, $\cos\alpha$ kiek norima mažai skiriasi nuo 1, nes kampas α yra kiek norima mažas. Vadinasi, S_1 kiek norima mažai skiriasi nuo $\frac{lR}{2}$; l — skritulio apskritimo ilgis. Taip pat samprotaudami, gautume, kad ir S_2 kiek norima mažai skiriasi nuo $\frac{lR}{2}$. Skritulio plotas S yra tarp S_1 ir S_2, todėl ir jis kiek norima mažai skiriasi nuo $\frac{lR}{2}$. Taip gali būti tik tada, kai $S=\frac{lR}{2}$.

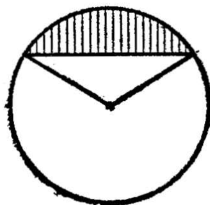
Taigi ***skritulio ploto formulė yra tokia:***

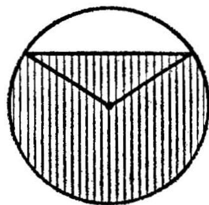
$$S=\frac{lR}{2}=\pi R^2.$$

Skritulio išpjova vadinama skritulio dalis, esanti atitinkamo centrinio kampo viduje (204 pav.).



204 pav.





205 pav.

Skritulio išpjovos ploto formulė tokia:

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha;$$

R — skritulio spindulys, α — atitinkamo centrinio kampo laipsninis matas.

Skritulio nuopjova vadinama skritulio ir pusplokštumės bendroji dalis (205 pav.). ***Jei nuopjova yra ne pusskritulis, nuopjovos ploto formulė yra tokia:***

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_{\triangle};$$

α — centrinio kampo, kuriame yra tos nuopjovos lankas, laipsninis matas, o $S_{\triangle}$ — trikampio, kurio viršūnės yra skritulio centras ir atitinkamą išpjovą ribojančių spindulių galai, plotas. Ženklą „—" reikia rašyti tada, kai $\alpha<180°$, o ženklą „+" tada, kai $\alpha>180°$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Suformuluokite ploto savybes.
2. Įrodykite, kad stačiakampio, kurio kraštinės *a* ir *b*, plotas lygus *ab*.
3. Įrodykite, kad lygiagretainio plotas lygus lygiagretainio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai.
4. Įrodykite, kad trikampio plotas lygus pusės trikampio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai.
5. Įrodykite, kad trapecijos plotas lygus jos pagrindų sumos pusės ir aukštinės sandaugai.
6. Įrodykite, kad iškilojo apibrėžtinio daugiakampio plotas lygus daugiakampio pusperimetrio ir skritulio spindulio sandaugai.
7. Koks yra panašiųjų figūrų plotų santykis?
8. Išveskite skritulio ploto formulę.
9. Kokios formulės taikomos skritulio išpjovos ir skritulio nuopjovos plotui apskaičiuoti?

PRATIMAI

1. Įrodykite, kad kvadratų, kurių kraštinės lygios stačiojo trikampio statiniams, plotų suma lygi kvadrato, kurio kraštinė lygi to trikampio įžambinei, plotui.
2. Dviejų kvadratinių žemės sklypų kraštinės lygios 100 m ir 150 m. Raskite jiems lygiapločio kvadratinio sklypo kraštinę.
3. Kvadrato įstrižainė lygi *a*. Raskite kvadrato plotą *S*.

4. Apie apskritimą apibrėžtas kvadratas ir į tą patį apskritimą įbrėžtas kvadratas. Kiek kartų pirmo kvadrato plotas didesnis už antro kvadrato plotą?
5. Kaip pasikeis kvadrato plotas, kiekvieną jo kraštinę padidinus 3 kartus?
6. Kiek kartų reikia sumažinti kvadrato kraštines, kad jo plotas sumažėtų 25 kartus?
7. Stačiakampio kraštinių santykis yra 4 : 9, stačiakampio plotas lygus 144 m^2. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines.
8. Stačiakampio perimetras lygus 74 dm, o plotas 3 m^2. Apskaičiuokite stačiakampio kraštines.
9. Lygiagretainio kraštinių ilgiai lygūs stačiakampio kraštinių ilgiams. Lygiagretainio plotas lygus pusei stačiakampio ploto. Raskite lygiagretainio smailųjį kampą.
10. Kvadrato perimetras lygus rombo perimetrui. Katro plotas didesnis? Pagrįskite atsakymą.
11. Rombo aukštinė lygi 10 cm, smailus kampas 30°. Apskaičiuokite rombo plotą.
12. Rombo aukštinė lygi 12 cm, o mažesnioji įstrižainė, 13 cm. Apskaičiuokite rombo plotą.
13. Įrodykite, kad rombo plotas lygus pusei jo įstrižainių sandaugos.
14. Rombo įstrižainių santykis yra 1 : 2, o plotas lygus 12 cm^2. Raskite rombo kraštinę.
15. Įrodykite: jei iškilojo keturkampio įstrižainės viena kitai statmenos, tai keturkampio plotas lygus pusei įstrižainių sandaugos.
16. Tiesėmis, einančiomis per vieną trikampio viršūnę, tą trikampį padalykite į tris lygiaplotes dalis.
17. Išspręskite panašų į 16 uždavinį, kai vietoj trikampio yra lygiagretainis.
18. Lygiašonio trikampio pagrindas lygus 120 m, o šoninė kraštinė 100 m. Apskaičiuokite trikampio plotą.
19. Lygiašonio stačiojo trikampio įžambinė lygi a. Raskite trikampio plotą.
20. Į trikampio kraštines, kurių ilgiai 8 cm ir 4 cm, nubrėžtos aukštinės. Į 8 cm ilgio kraštinę nubrėžta aukštinė lygi 3 cm. Raskite aukštinę, nubrėžtą į 4 cm ilgio kraštinę.
21. Įrodykite, kad trikampio kraštinės atvirkščiai proporcingos jo aukštinėms, t. y.

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

22. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a. Raskite trikampio plotą.
23. Į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis trikampis. Raskite trikampio plotą.
24. Stačiojo trikampio aukštinė dalija įžambinę į 32 cm ir 18 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite trikampio plotą.

25. Stačiojo trikampio įžambinė lygi 73 cm, plotas lygus 1 320 cm². Raskite statinius.

26. Įrodykite, kad trikampio ABC plotui apskaičiuoti galima taikyti tokią formulę:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A.$$

27. Trikampio ABC kraštinės $AC=a$, $BC=b$. Koks turi būti kampas C, kad trikampio plotas būtų didžiausias?

28. Lygiašonio trikampio kampas tarp šoninių kraštinių lygus 70°, o kiekviena jų lygi 1 m. Apskaičiuokite trikampio plotą.

29. Lygiagretainio kraštinės lygios 2 m ir 3 m, o vienas kampas lygus 70°. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą.

30. Trikampio kraštinė lygi a, o prie jos esantys kampai α ir β. Raskite trikampio plotą.

31. Įrodykite, kad lygiagretainio plotas lygus jo įstrižainių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei.

32. Įrodykite, kad iš visų lygiagretainių, kurių vieno įstrižainės lygios kito įstrižainėms, rombo plotas yra didžiausias.

33. Išveskite Herono formulę trikampio plotui apskaičiuoti:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

a, b, c — trikampio kraštinių ilgiai, p — trikampio pusperimetris.

34. Trikampio kraštinės lygios: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83. Apskaičiuokite trikampio plotą.

35. Trikampio kraštinės lygios: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83. Apskaičiuokite trikampio aukštinę: mažiausią (1—3 atveju), didžiausią (4—6 atveju).

36. Išveskite šias formules apibrėžto apie trikampį apskritimo spinduliui (R) ir įbrėžto į trikampį apskritimo spinduliui (r) apskaičiuoti:

$$R=\frac{abc}{4S};\quad r=\frac{2S}{a+b+c};$$

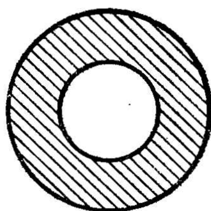
a, b, c — trikampio kraštinės, S — trikampio plotas.

37. Raskite apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį (R) ir įbrėžto į trikampį apskritimo spindulį (r), kai trikampio kraštinės yra: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

38. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 6 cm, aukštinė lygi 4 cm. Apskaičiuokite apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį.

39. Irodykite: į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus statinių sumos ir įžambinės skirtumo pusei.

40. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 40 cm ir 42 cm. Raskite apibrėžto apie trikampį ir įbrėžto į trikampį apskritimų spindulius.



206 pav.

41. Trapecijos lygiagrečiosios kraštinės lygios 60 cm ir 20 cm, o nelygiagrečiosios — 13 cm ir 37 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

42. Lygiašonės trapecijos didesnysis pagrindas lygus 44 m, šoninė kraštinė 17 m ir įstrižainė 39 m. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

43. Apskritimo ilgis lygus l. Raskite skritulio plotą.

44. Raskite skritulinio žiedo (206 pav.), esančio tarp dviejų apskritimų, plotą, kai apskritimų centras yra tas pats, o spinduliai lygūs: 1) 4 cm ir 6 cm; 2) 5,5 m ir 6,5 m; 3) a ir b ($a>b$).

45. Kiek kartų padidės skritulio plotas, jo skersmenį padidinus: 1) 2 kartus; 2) 5 kartus; 3) m kartų?

46. Į skritulį įbrėžtas: 1) kvadratas; 2) taisyklingasis trikampis; 3) taisyklingasis šešiakampis. Raskite skritulio ir kiekvienos įbrėžtųjų figūrų plotų santykį.

47. Į taisyklingąjį trikampį įbrėžtas skritulys ir apie tą trikampį apibrėžtas skritulys. Raskite skritulių plotų santykį.

48. Apie kvadratą apibrėžtas skritulys ir į tą kvadratą įbrėžtas skritulys. Raskite skritulių plotų santykį.

49. Skritulio spindulys lygus R. Raskite skritulio išpjovos plotą, kai ją atitinkantis centrinis kampas lygus: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

50. Apskritimo spindulys lygus R. Raskite išpjovos plotą, kai atitinkamo lanko ilgis lygus: 1) R; 2) l.

51. Skritulio nuopjovos pagrindas lygus $a\sqrt{3}$, o aukštinė $\frac{a}{2}$. Raskite nuopjovos plotą.

52. Skritulio spindulys R. Į skritulį įbrėžtas: 1) kvadratas; 2) taisyklingasis trikampis; 3) taisyklingasis šešiakampis. Raskite kiekvienos įbrėžtųjų figūrų išorėje esančios skritulio dalies plotą.

§ 14. STEREOMETRIJOS AKSIOMOS

Stereometrija — geometrijos dalis, kurioje nagrinėjamos erdvinės figūros. Stereometrijoje, kaip ir planimetrijoje, geometrinių figūrų savybės atskleidžiamos, įrodant teoremas. Įrodant remiamasi pagrindinių geometrinių figūrų savybėmis, kurias nusako aksiomos. Erdvės pagrindinės figūros yra taškas, tiesė ir plokštuma. Prijungus naują geometrinę figūrą — plokštumą, tenka išplėsti aksiomų sistemą. Pridėsime aksiomų grupę S, kurioje išreiškiamos plokštumų erdvėje pagrindinės savybės. Tą grupę sudaro šitokios trys aksiomos.

S_1. ***Kad ir kokia būtų plokštuma, yra taškų, priklausančių tai plokštumai, ir taškų, nepriklausančių tai plokštumai.***

S_2. ***Jei dvi skirtingos plokštumos turi bendrą tašką, tai jos susikerta tiese.***

Šia aksioma teigiama štai kas. Jei dvi skirtingos plokštumos α ir β turi bendrą tašką, tai jos turi ir bendrą tiesę c; be to, jei taškas C priklauso abiem plokštumoms, tai jis priklauso tiesei c.

S_3. ***Jei dvi skirtingos tiesės turi bendrą tašką, tai per jas galima išvesti vieną ir tik vieną plokštumą.***

Tai reiškia štai ką. Jei dvi skirtingos tiesės a ir b turi bendrą tašką C, tai jos nusako plokštumą γ, kurioje yra ir tiesė a, ir tiesė b. Plokštuma, kuriai būdinga tokia savybė, yra tik viena.

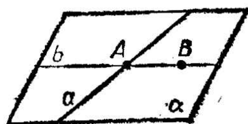
Taigi stereometrijos aksiomų sistemą sudaro planimetrijos aksiomos ir grupės S aksiomos. Kad būtų patogiau dėstyti, priminsime planimetrijos pirmosios grupės aksiomas.

I_1. ***Kad ir kokia būtų tiesė, yra taškų, priklausančių tai tiesei, ir taškų, nepriklausančių tai tiesei.***

I_2. ***Per bet kuriuos du taškus galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę.***

STEREOMETRIJOS AKSIOMŲ KAI KURIOS IŠVADOS

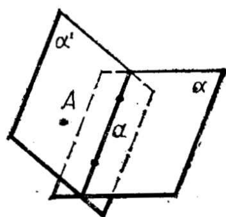
14.1 teorema. ***Per tiesę ir joje nesantį tašką galima išvesti vieną ir tik vieną plokštumą.***



207 pav.

Įrodymas. Sakykime, a — tiesė ir B — joje nesantis taškas (207 pav.). Tiesėje a pažymėkime kokį nors tašką A. Remiantis I_1 aksioma, toks taškas tikrai yra. Per taškus A ir B išveskime tiesę b (I_2 aksioma). Tiesės a ir b skirtingos, nes tiesės b taškas B nėra

tiesėje a. Tiesės a ir b turi bendrą tašką A. Per tieses a ir b išveskime plokštumą α (aksioma S_3). Ta plokštuma eina per tiesę a ir tašką B.



208 pav.

Įrodysime, kad plokštuma α yra vienintelė plokštuma, einanti per tiesę a ir tašką B. Tarkime, kad yra kita plokštuma α', einanti per tiesę a ir tašką B ir nesutampanti su plokštuma α. Remiantis aksioma S_2, skirtingos plokštumos α ir α' susikerta tiese; šiuo atveju tiese a. Iš čia išeina, kad bet kurie trys bendri plokštumų α ir α' taškai yra tiesėje a. Tačiau plokštumų α ir α' bendras taškas B tikrai nėra tiesėje a. Gavome prieštarą. Teorema įrodyta.

Uždavinys (5). Keturi taškai yra ne vienoje plokštumoje. Ar kurie nors trys iš jų gali būti vienoje tiesėje? Pagrįskite atsakymą.

Sprendimas. Tarkime, kad kurie nors trys taškai yra vienoje tiesėje. Per tą tiesę ir ketvirtą tašką išvestume plokštumą (14.1 teorema). Toje plokštumoje būtų visi keturi taškai, o tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, jokie trys taškai negali būti vienoje tiesėje.

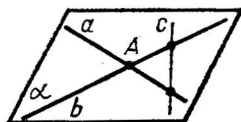
14.2 teorema. ***Jei du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai tiesė yra plokštumoje.***

Įrodymas. Sakykime, a — tiesė ir α — plokštuma (208 pav.). Remiantis I_1 aksioma, yra taškas A, nepriklausantis tiesei a. Per tiesę a ir tašką A išveskime plokštumą α'. Jei plokštuma α' sutampa su plokštuma α, tai, kaip ir teigiama teoremoje, plokštuma α eina per tiesę a. Jei plokštuma α' nesutampa su plokštuma α, tai jos susikerta tiese a', kurioje yra du tiesės a taškai. Remiantis I_2 aksioma, tiesė a' sutampa su tiese a. Vadinasi, tiesė a yra plokštumoje α. Teorema įrodyta.

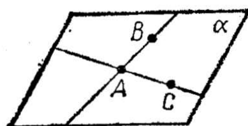
Iš 14.2 teoremos išplaukia, kad ***plokštuma ir joje nesanti tiesė arba nesusikerta, arba susikerta viename taške.***

Uždavinys (7). Dvi tiesės susikerta taške A. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios abi tieses ir neinančios per tašką A, yra vienoje plokštumoje.

Sprendimas. Per duotąsias tieses a ir b išveskime plokštumą α (209 pav.). Tai galima padaryti, remiantis aksioma S_3. Tiesė c, kertanti tieses a ir b, ir plokštuma α turi du bendrus taškus M ir N (jie yra tiesės c ir tiesių a ir b susikirtimo taškai). Remiantis 14.2 teorema, tiesė c yra plokštumoje α.



209 pav.



210 pav.

14.3 teorema. ***Per tris taškus, esančius ne vienoje tiesėje, galima išvesti vieną ir tik vieną plokštumą.***

Įrodymas. Sakykime, A, B, C — trys taškai, esantys ne vienoje tiesėje (210 pav.). Išveskime tieses AB ir AC. Jos nesutampa, nes taškai A, B, C nėra vienoje tiesėje. Remiantis aksioma S_3, per tieses AB ir AC galima išvesti plokštumą α. Taškai A, B, C yra toje plokštumoje.

Įrodysime, kad plokštuma α yra vienintelė plokštuma, einanti per taškus A, B, C. Iš tikrųjų, remiantis 14.2 teorema, plokštuma, einanti per taškus A, B, C eina per tieses AB ir AC. Remiantis aksioma S_3, tokia plokštuma yra tik viena.

Uždavinys (11). Ar galima išvesti plokštumą per tris taškus, kurie yra vienoje tiesėje? Pagrįskite atsakymą.

Sprendimas. Sakykime, A, B, C — trys taškai, esantys tiesėje a. Pasirinkime tašką D, nesantį tiesėje a (I_1 aksioma). Per taškus A, B, D galima išvesti plokštumą (14.3 teorema). Toje plokštumoje yra du tiesės a taškai — A ir B, todėl plokštumoje yra ir jos taškas C (14.2 teorema). Vadinasi, per tris taškus, esančius vienoje tiesėje, visada galima išvesti plokštumą.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kas yra stereometrija?
2. Suformuluokite grupės S aksiomas.
3. Įrodykite, kad per tiesę ir joje nesantį tašką galima išvesti vieną ir tik vieną plokštumą.
4. Įrodykite: jei du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai tiesė yra plokštumoje.
5. Įrodykite, kad per tris taškus, esančius ne vienoje tiesėje, galima išvesti vieną ir tik vieną plokštumą.

PRATIMAI

1. Taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Įrodykite, kad tiesės AB ir CD nesusikerta.
2. Ar per dviejų tiesių susikirtimo tašką galima išvesti tiesę, kuri būtų ne vienoje plokštumoje su tomis tiesėmis? Pagrįskite atsakymą.
3. Taškai A, B, C yra kiekvienoje iš dviejų skirtingų plokštumų. Įrodykite, kad tie taškai yra vienoje tiesėje.
4. Kiekvienos dvi iš trijų plokštumų susikerta. Jei dvi iš tų plokštumų susikirtimo tiesių susikerta, tai ir trečioji tiesė eina per jų susikirtimo tašką. Įrodykite.

5. Keturi taškai yra ne vienoje plokštumoje. Ar kurie nors trys iš jų gali būti vienoje tiesėje? Pagrįskite atsakymą.
6. Įrodykite, kad tiesė, kertanti vieną iš dviejų nesusikertančių plokštumų, kerta ir kitą.
7. Dvi tiesės susikerta taške A. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios abi tieses ir neinančios per tašką A, yra vienoje plokštumoje.
8. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios tą pačią tiesę ir einančios per šalia jos esantį tašką, yra vienoje plokštumoje.
9. Įrodykite: jei tiesės AB ir CD yra ne vienoje plokštumoje, tai tiesės AC ir BD irgi yra ne vienoje plokštumoje.
10. Keturi taškai nėra vienoje plokštumoje. Kiek galima išvesti skirtingų plokštumų, kurių kiekviena eitų per tris iš tų taškų? Pagrįskite atsakymą.
11. Ar galima išvesti plokštumą per tris taškus, kurie yra vienoje tiesėje? Pagrįskite atsakymą.
12. Ar per tris taškus, esančius vienoje tiesėje, galima išvesti dvi skirtingas plokštumas? Pagrįskite atsakymą.
13. Tiesė, einanti per bet kuriuos du iš keturių taškų ir tiesė, einanti per kitus du taškus, nesusikerta. Įrodykite, kad tie keturi taškai yra ne vienoje plokštumoje.

§ 15. TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMAS

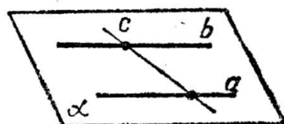
LYGIAGREČIOSIOS TIESĖS ERDVĖJE

Lygiagrečiomis tiesėmis erdvėje vadinamos dvi tiesės, kurios yra vienoje plokštumoje ir nesusikerta. Tiesės, kurios nesusikerta ir nėra vienoje plokštumoje vadinamos *prasilenkiančiomis.*

Uždavinys (1). Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios dvi lygiagrečias tieses, yra vienoje plokštumoje.

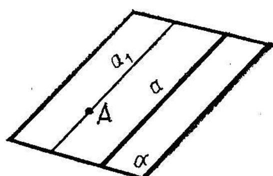
Sprendimas. Kadangi nagrinėjamos tiesės a ir b yra lygiagrečios, tai per jas galima išvesti plokštumą (211 pav.). Ją pažymėkime α. Tiesė c, kertanti lygiagrečias tiesės a ir b, ir plokštuma α turi du bendrus taškus — tos tiesės susikirtimo su tiesėmis a ir b taškus. Remiantis 14.2 teorema, ta tiesė yra plokštumoje α. Taigi visos tiesės, kertančios dvi lygiagrečias tieses, yra vienoje plokštumoje (α).

15.1 teorema. ***Per šalia tiesės esantį tašką galima išvesti vieną ir tik vieną jai lygiagrečią tiesę.***



211 pav.

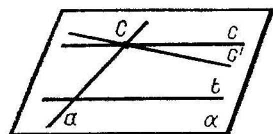
Įrodymas. Sakykime, a — tiesė ir A — šalia jos esantis taškas (212 pav.). Per tiesę a ir tašką A išveskime plokštumą α. Plokštumoje α per tašką A išves-



212 pav.

kime tiesę a_1, lygiagrečią tiesei a. Įrodysime, kad tiesė a_1 yra vienintelė tiesė, einanti per tašką A ir lygiagreti tiesei a.

Tarkime, kad yra kita tiesė a_2, einanti per tašką A ir lygiagreti tiesei a. Per tieses a ir a_2 galima išvesti plokštumą α_2. Plokštuma α_2 eis per tiesę a ir tašką A. Remiantis 14.1 teorema, plokštuma α_2 sutaps su plokštuma α. Remiantis lygiagrečių aksioma, sutaps ir tiesės a_1 bei a_2. Teorema įrodyta.



213 pav.

Uždavinys (2). Tiesės a ir b — susikertančios. Įrodykite, kad visos tiesės, lygiagrečios tiesei b ir kertančios tiesę a, yra vienoje plokštumoje.

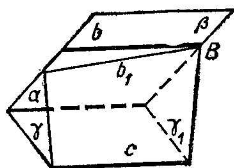
Sprendimas. Sakykime, c — tiesė, lygiagreti tiesei b ir kertanti tiesę a (213 pav.). Per tieses a ir b išveskime plokštumą α. Plokštumoje α per tiesių a ir c susikirtimo tašką C išveskime tiesę c', lygiagrečią tiesei b. Remiantis 15.1 teorema, per tašką C galima išvesti tik vieną tiesę, lygiagrečią tiesei b. Iš čia išeina, kad tiesė c' sutampa su tiese c, vadinasi, tiesė c yra plokštumoje α. Taigi kiekviena tiesė c, lygiagreti tiesei b ir kertanti tiesę a, yra plokštumoje α. Tai ir reikėjo įrodyti.

15.2 teorema. ***Dvi tiesės, lygiagrečios trečiai tiesei, yra lygiagrečios viena kitai.***

Įrodymas. Sakykime, tiesės b ir c lygiagrečios tiesei a. Įrodysime, kad tiesės b ir c yra lygiagrečios.

Atvejis, kai tiesės a, b, c yra vienoje plokštumoje, išnagrinėtas planimetrijoje. Todėl tarkime, kad tos tiesės yra ne vienoje plokštumoje. Sakykime, β — plokštuma, kurioje yra tiesės a ir b, o γ — plokštuma, kurioje yra tiesės a ir c. Plokštumos β ir γ yra skirtingos (214 pav.). Tiesėje b pažymėkime kokį nors tašką B. Per tiesę c ir tašką B išveskime plokštumą γ_1. Plokštumų γ_1 ir β susikirtimo tiesė yra b_1.

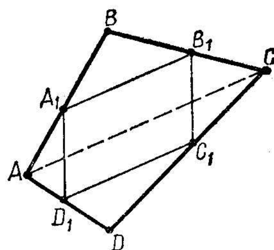
Tiesė b_1 nekerta plokštumos γ. Iš tikrųjų, susikirtimo taškas turėtų priklausyti tiesei a, nes tiesė b_1 yra plokštumoje β. Antra vertus, tas taškas turėtų būti ir tiesėje c, nes tiesė b_1 yra plokštumoje γ_1. Tačiau tiesės a ir c nesusikerta, nes yra lygiagrečios.



214 pav.

Kadangi tiesė b_1 yra plokštumoje β ir nekerta tiesės a, tai ji lygiagreti tiesei a, vadinasi, remiantis lygiagrečių aksioma, sutampa su tiese b. Tada tiesė b, sutampanti su tiese b_1, ir tiesė c yra vienoje plokštumoje (γ_1) ir nesusikerta. Vadinasi, tiesės b ir c yra lygiagrečios. Teorema įrodyta.

Uždavinys (10). Įrodykite, kad erdvinio keturkampio kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.



215 pav.

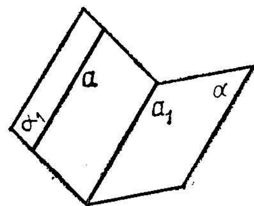
Sprendimas. Sakykime, $ABCD$ — erdvinis keturkampis (keturkampio viršūnės yra ne vienoje plokštumoje; 215 pav.), A_1, B_1, C_1, D_1 — jo kraštinių vidurio taškai. Tada A_1B_1 yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl lygiagreti kraštinei AC. Trikampio ACD vidurinė linija C_1D_1 irgi lygiagreti kraštinei AC. Remiantis 15.2 teorema, tiesės A_1B_1 ir C_1D_1 yra lygiagrečios, todėl yra vienoje plokštumoje. Šitaip įrodomas ir tiesių A_1D_1 ir B_1C_1 lygiagretumas. Taigi keturkampis $A_1B_1C_1D_1$ yra vienoje plokštumoje, jo priešingosios kraštinės lygiagrečios. Vadinasi, tas keturkampis — lygiagretainis.

TIESĖS IR PLOKŠTUMOS LYGIAGRETUMAS

Tiesė ir plokštuma, kurios nesusikerta, vadinamos *lygiagrečiomis.*

15.3 teorema. ***Jei plokštumoje nesanti tiesė lygiagreti kokiai nors tos plokštumos tiesei, tai ji lygiagreti ir plokštumai.***

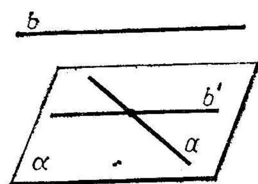
Įrodymas. Sakykime, α — plokštuma, a — toje plokštumoje nesanti tiesė ir a_1 — plokštumos α tiesė, lygiagreti tiesei a. Per tieses a ir a_1 išveskime plokštumą α_1 (216 pav.). Ji nesutampa su plokštuma α, nes tiesė a nėra plokštumoje α. Plokštumų α ir α_1 susikirtimo tiesė yra a_1. Jei tiesė a kirstų plokštumą α, tai susikirtimo taškas priklausytų tiesei a_1. Tačiau tai negalima, nes tiesės a ir a_1 lygiagrečios. Taigi tiesė a nekerta plokštumos α, vadinasi, tiesė a lygiagreti plokštumai α. Teorema įrodyta.



216 pav.

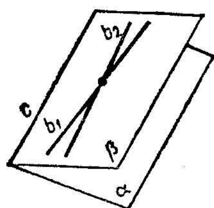
Uždavinys (16). Įrodykite, kad per kiekvieną iš dviejų prasilenkiančių tiesių galima išvesti kitai tiesei lygiagrečią plokštumą.

Sprendimas. Sakykime, a ir b — prasilenkiančios tiesės (217 pav.). Tiesėje a pasirinkime bet kurį tašką ir per jį išveskime tiesę b', lygiagrečią tiesei b. Per tieses a ir b' išveskime plokštumą α. Remiantis 15.3 teorema, plokštuma α lygiagreti tiesei b.



217 pav.

PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMAS

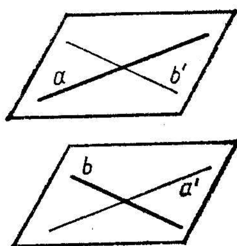


218 pav.

Lygiagrečiomis plokštumomis vadinamos dvi plokštumos, kurios nesusikerta.

15.4 teorema. ***Dvi plokštumos yra lygiagrečios, jei viena jų lygiagreti dviem susikertančioms tiesėms, esančioms kitoje plokštumoje.***

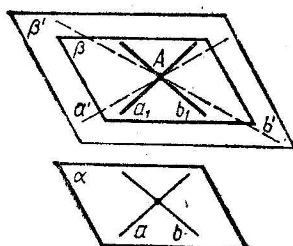
Įrodymas. Sakykime, α ir β — plokštumos, b_1, b_2 — susikertančios tiesės, esančios plokštumoje β ir lygiagrečios plokštumai α (218 pav.). Tarkime, kad plokštumų α ir β susikirtimo tiesė yra c. Kadangi tiesės b_1 ir b_2 nekerta plokštumos α, tai jos nekerta ir tos plokštumos tiesės c. Tačiau taip būti negali (prieštarauja lygiagrečių aksiomai), mat tiesės b_1, b_2 ir c yra vienoje plokštumoje (β). Gavome prieštarą. Teorema įrodyta.



219 pav.

Uždavinys (19). Kaip išvesti dvi lygiagrečias plokštumas per dvi prasilenkiančias tieses?

Sprendimas. Sakykime, a ir b — prasilenkiančios tiesės (219 pav.). Per bet kurį tiesės a tašką išveskime tiesę b', lygiagrečią tiesei b, o per bet kurį tiesės b tašką išveskime tiesę a', lygiagrečią tiesei a. Išveskime dvi plokštumas: vieną per tieses a ir b', kitą — per tieses b ir a'. Remiantis 15.4 teorema, tos plokštumos yra lygiagrečios. Pirmojoje plokštumoje yra tiesė a, antroje — tiesė b.



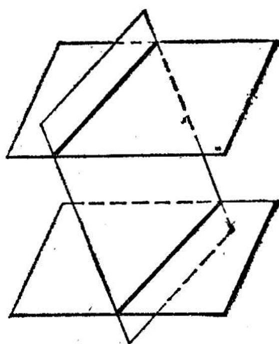
220 pav.

15.5 teorema. ***Per tašką, esantį šalia plokštumos, galima išvesti vieną ir tik vieną jai lygiagrečią plokštumą.***

Įrodymas. Plokštumoje α išveskime kokias nors dvi susikertančias tieses a ir b (220 pav.). Per duotąjį tašką A išveskime joms lygiagrečias tieses a_1 ir b_1. Per tieses a_1 ir b_1 einanti plokštuma β yra lygiagreti plokštumai α (žr. 15.4 teoremą).

Tarkime, kad per tašką A eina kita plokštuma — β', lygiagreti plokštumai α. Lygiagrečių tiesių a ir a_1 plokštumos ir plokštumos β' susikirtimo tiesė yra a'. Tiesė a' nekerta tiesės a, nes ji nekerta per tiesę a einančios plokštumos α. Vadinasi, tiesė a' lygiagreti tiesei a ir, remiantis lygiagrečių aksioma, sutampa su tiese a_1. Lygiagrečių tiesių b ir b_1 plokštumos ir plokštumos β' susikirtimo tiesė yra b'. Tiesė b' nekerta tiesės b, todėl tiesė b' lygiagreti tiesei b, taigi sutampa su tiese b_1. Remiantis aksioma

S_3, per tieses a_1 ir b_1 galima išvesti tik vieną plokštumą, todėl plokštuma β' sutampa su plokštuma β. Gavome prieštarą. Teorema įrodyta.

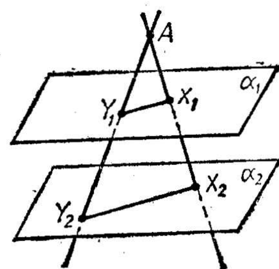

221 pav.

Uždavinys (23). Plokštumos α ir β lygiagrečios plokštumai γ. Ar plokštumos α ir β gali susikirsti?

Sprendimas. Plokštumos α ir β negali susikirsti. Jei plokštumos α ir β turėtų bendrą tašką, tai per tą tašką eitų dvi plokštumos (α ir β), lygiagrečios plokštumai γ. Tai prieštarautų 15.5 teoremai.

15.6 teorema. ***Jei dvi lygiagrečios plokštumos perkirstos trečiąja plokštuma, tai jų susikirtimo tiesės yra lygiagrečios*** (221 pav.).

Įrodymas. Remiantis apibrėžimu, lygiagrečios tiesės — tiesės, kurios yra vienoje plokštumoje ir nesusikerta. Nagrinėjamosios tiesės yra vienoje plokštumoje — kertančiojoje plokštumoje. Jos nesusikerta, nes nesusikerta per jas einančios lygiagrečios plokštumos. Vadinasi, tos tiesės lygiagrečios. Teorema įrodyta.



222 pav.

Uždavinys (33). Taškas A nėra nė vienoje iš dviejų lygiagrečių plokštumų α_1, α_2. Per tašką A išvesta bet kokia tiesė. Sakykime, X_1, X_2 — tos tiesės ir plokštumų α_1, α_2 susikirtimo taškai. Įrodykite, kad atkarpų ilgių santykis $AX_1 : AX_2$ nepriklauso nuo išvestosios tiesės.

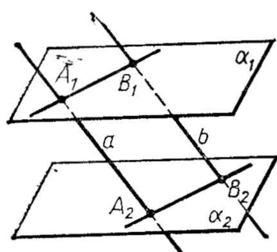
Sprendimas. Per tašką A išveskime kitą tiesę, jos ir plokštumų α_1 ir α_2 susikirtimo taškus pažymėkime Y_1 ir Y_2 (222 pav.). Per tieses AX_1 ir AY_1 išveskime plokštumą. Jos susikirtimo su plokštumomis α_1 ir α_2 tiesės X_1Y_1 ir X_2Y_2 yra lygiagrečios (15.6 teorema). Iš čia išplaukia, kad trikampiai AX_1Y_1 ir AX_2Y_2 yra panašūs. Tuo remdamiesi rašome proporciją

$$\frac{AX_1}{AX_2}=\frac{AY_1}{AY_2},$$

t.y. santykiai $AX_1 : AX_2$ ir $AY_1 : AY_2$ yra vienodi abiejų tiesių atveju.

15.7 teorema. ***Lygiagrečių atkarpos, esančios tarp dviejų lygiagrečių plokštumų, yra lygios.***

Įrodymas. Sakykime, α_1 ir α_2 — lygiagrečios plokštumos, a ir b — jas kertančios lygiagrečios tiesės, A_1, A_2 ir B_1, B_2 —



223 pav.

tiesių ir plokštumų susikirtimo taškai (223 pav.). Per tieses a ir b išveskime plokštumą. Ji kirs plokštumas α_1 ir α_2 lygiagrečiomis tiesėmis A_1B_1 ir A_2B_2. Keturkampis $A_1B_1B_2A_2$ — lygiagretainis, nes jo priešingosios kraštinės lygiagrečios. Lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios. Vadinasi, $A_1A_2=B_1B_2$. Teorema įrodyta.

ERDVINIŲ FIGŪRŲ VAIZDAVIMAS PLOKŠTUMOJE

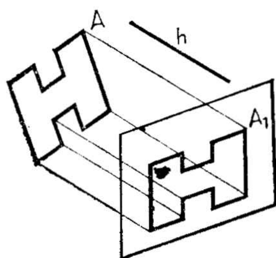
Erdvinių figūrų vaizdui plokštumoje gauti dažniausiai taikomas lygiagretusis projektavimas į plokštumą. Jo esmė tokia. Pasirenkame kokią nors tiesę h, kertančią brėžinio plokštumą, ir per kiekvieną figūros tašką A vedame tiesę, lygiagrečią tiesei h. Tos tiesės ir brėžinio plokštumos susikirtimo taškas A_1 bus taško A atvaizdas (224 pav.). Taip suradę figūros kiekvieno taško atvaizdą, gausime figūros atvaizdą. Toks erdvinės figūros vaizdavimo plokštumoje būdas atitinka figūros regimąjį suvokimą, kai į figūrą žiūrima iš toli.

Pateikiame figūros atvaizdo plokštumoje savybių, išplaukiančių iš pateiktojo figūros atvaizdo gavimo aprašo.

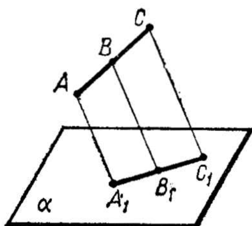
Atkarpos atvaizdas yra atkarpa (225 pav.). Iš tikrųjų, atkarpos AC taškus projektuojančios visos tiesės yra vienoje plokštumoje, kuri kerta brėžinio plokštumą α tiese A_1C_1. Atkarpos AC kiekvieno taško B atvaizdas yra atkarpos A_1C_1 taškas B_1.

P a s t a b a. Įrodydami laikėme ir toliau laikysime, kad projektuojamosios atkarpos yra nelygiagrečios projektavimo krypčiai.

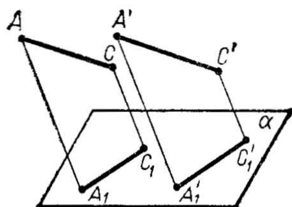
Lygiagrečių atkarpų atvaizdai yra lygiagrečios atkarpos (226 pav.). Iš tikrųjų, sakykime, AC ir $A'C'$ — lygiagrečios atkarpos. Tiesės A_1C_1 ir $A'_1C'_1$ lygiagrečios, nes gautos lygiagrečioms plokštumoms susikirtus su plokštuma α. Pirmoji plokštuma eina per tieses AC ir AA_1, o antroji — per tieses $A'C'$ ir $A'A'_1$.



224 pav.



225 pav.



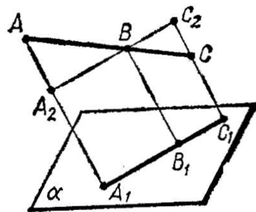
226 pav.

Tiesės arba lygiagrečių tiesių atkarpų santykis, lygiagrečiai projektuojant, nekinta.

Pavyzdžiui, įrodysime, kad

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1} \text{ (227 pav.).} \qquad (*)$$

Per tašką B išveskime tiesę, lygiagrečią tiesei A_1C_1. Trikampiai BAA_2 ir BCC_2 panašūs. Iš trikampių panašumo ir gaunama proporcija (*).



227 pav.

Uždavinys (39). Kaip trikampio lygiagrečioje projekcijoje nubraižyti to trikampio pusiaukraštinių projekcijas?

Sprendimas. Lygiagrečiai projektuojant, tiesės atkarpų santykis nekinta, todėl kraštinės vidurio taško projekcija bus tos kraštinės projekcijos vidurio taškas. Vadinasi, trikampio pusiaukraštinių projekcijos bus trikampio projekcijos pusiaukraštinės.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kokios tiesės erdvėje vadinamos lygiagrečiomis?
2. Kokios tiesės vadinamos prasilenkiančiomis?
3. Įrodykite, kad per kiekvieną šalia tiesės esantį tašką galima išvesti vieną ir tik vieną jai lygiagrečią tiesę.
4. Įrodykite, kad dvi tiesės, lygiagrečios trečiajai, yra lygiagrečios viena kitai.
5. Ką reiškia: tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios?
6. Įrodykite, kad plokštuma ir joje nesanti tiesė yra lygiagrečios, jei plokštumoje yra tai tiesei lygiagreti tiesė.
7. Kokios plokštumos vadinamos lygiagrečiomis?
8. Įrodykite, kad dvi plokštumos yra lygiagrečios, jei viena jų lygiagreti dviem susikertančioms tiesėms, esančioms kitoje plokštumoje.
9. Įrodykite, kad per tašką, esantį šalia plokštumos, galima išvesti vieną ir tik vieną jai lygiagrečią plokštumą.
10. Įrodykite: jei dvi lygiagrečios plokštumos yra perkirstos trečia plokštuma, tai jų susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.
11. Įrodykite, kad lygiagrečių tiesių atkarpos, esančios tarp dviejų lygiagrečių plokštumų, yra lygios.
12. Išvardykite lygiagrečiojo projektavimo savybes.

PRATIMAI

1. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios dvi lygiagrečias tieses, yra vienoje plokštumoje.

2. Tiesės a ir b — susikertančios. Įrodykite, kad visos tiesės, lygiagrečios tiesei b ir kertančios tiesę a, yra vienoje plokštumoje.

3. Įrodykite: jei plokštuma kerta vieną iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji kerta ir kitą.

4. Per atkarpos AB galus ir jos vidurio tašką M nubrėžtos lygiagrečios tiesės, kertančios plokštumą taškuose A_1, B_1 ir M_1. Atkarpa AB tos plokštumos nekerta. Raskite atkarpos MM_1 ilgį, kai: 1) $AA_1=5$ m, $BB_1=7$ m; 2) $AA_1=3{,}6$ dm, $BB_1=$ $=4{,}8$ dm; 3) $AA_1=8{,}3$ cm, $BB_1=4{,}1$ cm; 4) $AA_1=a$, $BB_1=b$.

5. Išspręskite panašų į 4 uždavinį, kai atkarpa AB kerta plokštumą.

6. Per atkarpos AB galą A išvesta plokštuma, o per galą B ir atkarpos tašką C — lygiagrečios tiesės, kurios kerta plokštumą taškuose B_1 ir C_1. Raskite atkarpos BB_1 ilgį, kai: 1) $CC_1=$ $=15$ cm, $AC:BC=2:3$; 2) $CC_1=8{,}1$ cm, $AB:AC=11:9$; 3) $AB=6$ cm, $AC:CC_1=2:5$; 4) $AC=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.

7. Nagrinėjamas lygiagretainis $ABCD$ ir jo nekertanti plokštuma. Per lygiagretainio viršūnes išvestos lygiagrečios tiesės, kurios kerta plokštumą taškuose A_1, B_1, C_1, D_1. Raskite atkarpos DD_1 ilgį, kai: 1) $AA_1=2$ m, $BB_1=3$ m, $CC_1=8$ m; 2) $AA_1=4$ m, $BB_1=3$ m, $CC_1=1$ m; 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$.

8. Tiesės a ir b nėra vienoje plokštumoje. Ar galima išvesti tiesę c, lygiagrečią tiesėms a ir b?

9. Taškai A, B, C, D nėra vienoje plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė, einanti per atkarpų AB ir BC vidurio taškus, yra lygiagreti tiesei, einančiai per atkarpų AD ir CD vidurio taškus.

10. Įrodykite, kad erdvinio keturkampio kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

11. Taškai A, B, C, D nėra vienoje plokštumoje. Įrodykite, kad atkarpų AB ir CD, AC ir BD, AD ir BC vidurio taškus jungiančios tiesės eina per vieną tašką.

12. Nagrinėjamas trikampis ABC. Tiesei AB lygiagreti plokštuma kerta to trikampio kraštinę AC taške A_1, kraštinę BC — taške B_1. Raskite atkarpos A_1B_1 ilgį, kai: 1) $AB=15$ cm, $AA_1:AC=2:3$; 2) $AB=8$ cm, $AA_1:A_1C=5:3$; 3) $B_1C=$ $=10$ cm, $AB:BC=4:5$; 4) $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$.

13. Per duotą tašką nubrėžkite tiesę, lygiagrečią kiekvienai iš dviejų susikertančių plokštumų.

14. Įrodykite: jei tiesės AB ir CD yra prasilenkiančios, tai tiesės AC ir BD irgi prasilenkiančios.

15. Tiesės AB ir CD susikerta. Ar tiesės AC ir BD gali būti prasilenkiančios?

16. Įrodykite, kad per kiekvieną iš dviejų prasilenkiančių tiesių galima išvesti kitai tiesei lygiagrečią plokštumą.

17. Dvi plokštumos susikerta tiese a. Tų plokštumų susikirtimo su plokštuma α tiesės yra lygiagrečios. Įrodykite, kad tiesė a yra lygiagreti plokštumai α.
18. Įrodykite: jei tiesė kerta vieną iš dviejų lygiagrečių plokštumų, tai ji kerta ir kitą.
19. Kaip išvesti dvi lygiagrečias plokštumas per dvi prasilenkiančias tieses?
20. Per duotąjį erdvės tašką reikia nubrėžti tiesę, kertančią kiekvieną iš dviejų prasilenkiančių tiesių. Ar visada tai galima padaryti?
21. Atkarpų galai priklauso dviem prasilenkiančioms tiesėms. Įrodykite, kad tų atkarpų vidurio taškų geometrinė vieta yra plokštuma.
22. Taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Įrodykite, kad kiekviena tiesėms AB ir CD lygiagreti plokštuma kerta tieses AC, AD, BD ir BC, ir tie susikirtimo taškai yra lygiagretainio viršūnės.
23. Plokštumos α ir β lygiagrečios plokštumai γ. Ar plokštumos α ir β gali susikirsti?
24. Plokštumos α ir β susikerta. Įrodykite, kad bet kuri plokštuma γ kerta bent vieną iš plokštumų α ir β.
25. Įrodykite, kad visos tiesės, einančios per vieną tašką ir lygiagrečios vienai plokštumai, yra vienoje plokštumoje.
26. Per duotą tašką reikia išvesti plokštumą, lygiagrečią kiekvienai iš dviejų susikertančių tiesių. Ar visada tai galima padaryti?
27. Lygiagretainiai $ABCD$ ir ABC_1D_1 yra skirtingose plokštumose. Įrodykite, kad keturkampis CDD_1C_1 irgi lygiagretainis.
28. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnes išvestos lygiagrečios tiesės, kurios kerta to lygiagretainio plokštumai lygiagrečią plokštumą taškuose A_1, B_1, C_1, D_1. Įrodykite, kad keturkampis $A_1B_1C_1D_1$ irgi lygiagretainis.
29. Trikampis ABC yra vienoje iš dviejų lygiagrečių plokštumų. Per jo viršūnes išvestos lygiagrečios tiesės, kurios kerta kitą plokštumą taškuose A_1, B_1, C_1. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra lygūs.
30. Trys tiesės eina per vieną tašką. Jos lygiagrečias plokštumas kerta taškuose A, B, C ir A_1, B_1, C_1. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs.
31. Keturios tiesės eina per tašką A. Jos kerta plokštumą α taškuose, kurie yra lygiagretainio viršūnės. Įrodykite, kad tos tiesės kerta kiekvieną plokštumą, lygiagrečią plokštumai α ir neinančią per tašką A, taškuose, kurie irgi yra lygiagretainio viršūnės.
32. Per taškus A ir B, esančius vienoje iš dviejų lygiagrečių plokštumų, išvestos lygiagrečios tiesės, kurios kitą plokštumą kerta taškuose A_1 ir B_1; $AB=a$. Raskite A_1B_1.

33. Taškas A nėra nė vienoje iš dviejų lygiagrečių plokštumų α, α_2. Per tašką A išvesta bet kokia tiesė. Sakykime, X_1, X_2 — tos tiesės ir plokštumų α_1, α_2 susikirtimo taškai. Įrodykite, kad atkarpų ilgių santykis $AX_1 : AX_2$ nepriklauso nuo išvestosios tiesės.
34. Taškas A yra šalia plokštumos α; X — bet koks plokštumos α taškas, o X' — atkarpos AX taškas, dalijantis tą atkarpą santykiu $m:n$. Įrodykite, kad taškų X' geometrinė vieta yra plokštuma, lygiagreti plokštumai α.
35. Lygiagrečias plokštumas α_1, α_2, α_3 tiesė kerta taškuose X_1, X_2, X_3. Įrodykite, kad atkarpų ilgių santykis $X_1X_2 : X_2X_3$ nepriklauso nuo tiesės, t. y. tas pats, kad ir kokia tiesė kirstų tas plokštumas.
36. Plokštuma kerta keturias lygiagrečias tieses. Susikirtimo taškai yra lygiagretainio viršūnės. Įrodykite, kad kiekvienos plokštumos (nelygiagrečios toms tiesėms) susikirtimo su tomis tiesėmis taškai yra lygiagretainio viršūnės.
37. Vienoje iš dviejų lygiagrečių plokštumų yra apskritimas. Tas plokštumas kerta tiesė. Per kiekvieną apskritimo tašką X vedama tai tiesei lygiagreti tiesė; X' — tos tiesės ir kitos plokštumos susikirtimo taškas. Kokia figūra yra taškų X' geometrinė vieta? Pagrįskite atsakymą.
38. Šalia vienos iš dviejų lygiagrečių plokštumų yra taškas, o apskritimas — vienoje jų. Per kiekvieną apskritimo tašką X ir duotą tašką vedama tiesė; X' — tos tiesės ir kitos plokštumos susikirtimo taškas. Kokia figūra yra taškų X' geometrinė vieta? Pagrįskite atsakymą.
39. Kaip trikampio lygiagrečioje projekcijoje nubraižyti to trikampio pusiaukraštinių projekcijas?
40. Duota trikampio lygiagrečioji projekcija. Kas bus trikampio vidurinės linijos atvaizdas?
41. Ar lygiagretainio lygiagrečioji projekcija gali būti trapecija? Pagrįskite atsakymą.
42. Ar lygiagretainio lygiagrečioji projekcija gali būti kvadratas?
43. Įrodykite, kad centro atžvilgiu simetriškos figūros lygiagrečioji projekcija yra centro atžvilgiu simetriška figūra.
44. Kaip apskritimo ir jo skersmens lygiagrečioje projekcijoje nubraižyti tam skersmeniui statmeno skersmens projekciją?

§ 16. TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS

TIESIŲ STATMENUMAS

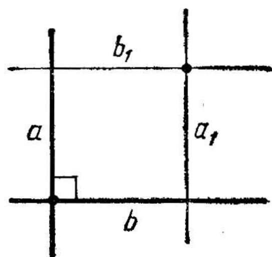
Kaip ir plokštumoje, *statmenomis* tiesėmis vadinamos dvi tiesės, kurios susikerta stačiu kampu.

16.1 teorema. ***Susikertančios tiesės, lygiagrečios statmenoms tiesėms, yra statmenos tiesės.***

Įrodymas. Sakykime, a ir b — statmenos tiesės, a_1 ir b_1 — joms lygiagrečios susikertančios tiesės. Įrodysime, kad tiesės a_1 ir b_1 yra statmenos.

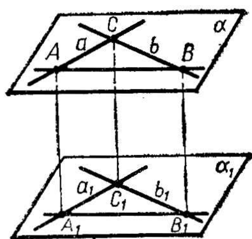
Jei tiesės a, b, a_1, b_1 yra vienoje plokštumoje (228 pav.), teiginys teisingas. Iš tikrųjų, kadangi tiesės b ir b_1 lygiagrečios, tai tiesė a, kuri statmena tiesei b, yra statmena ir tiesei b_1. Kadangi tiesės a ir a_1 lygiagrečios, tai tiesė b_1, kuri statmena tiesei a, yra statmena ir tiesei a_1.

Tarkime, kad nagrinėjamosios tiesės yra ne vienoje plokštumoje. Tada tiesės a ir b yra tam tikroje plokštumoje α, o tiesės a_1 ir b_1 — tam tikroje plokštumoje α_1 (229 pav.). Remiantis 15.3 teorema, tiesės a ir b lygiagrečios plokštumai α_1. Remiantis 15.4 teorema, plokštumos α ir α_1 lygiagrečios. Sakykime, C — tiesių a ir b susikirtimo taškas, C_1 — tiesių a_1 ir b_1 susikirtimo taškas. Lygiagrečių tiesių a ir a_1 plokštumoje išveskime tiesę, lygiagrečią tiesei CC_1. Ji kirs tieses a ir a_1 taškuose A ir A_1. Tiesių b ir b_1 plokštumoje išveskime tiesę, lygiagrečią tiesei CC_1, jos susikirtimo su tiesėmis b ir b_1 taškus pažymėkime B ir B_1.



228 pav.

Keturkampiai CAA_1C_1 ir CBB_1C_1 — lygiagretainiai, nes jų priešingosios kraštinės lygiagrečios. Keturkampis ABB_1A_1 irgi lygiagretainis. Jo kraštinės AA_1 ir BB_1 lygiagrečios, nes kiekviena jų lygiagreti tiesei CC_1, taigi jis yra plokštumoje, einančioje per lygiagrečias tieses AA_1 ir BB_1. Tos plokštumos susikirtimo su lygiagrečiomis plokštumomis α ir α_1 tiesės AB ir A_1B_1 yra lygiagrečios.

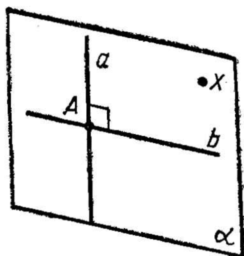


229 pav.

Kadangi lygiagretainio priešingosios kraštinės yra lygios, tai $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Remiantis trečiuoju trikampių lygumo požymiu, trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs. Vadinasi, kampas $A_1C_1B_1$ lygus kampui ACB, taigi status, t. y. tiesės a_1 ir b_1 statmenos. Teorema įrodyta.

Uždavinys (1). Įrodykite, kad erdvėje per kiekvieną tiesės tašką galima išvesti jai statmeną tiesę.

Sprendimas. Sakykime, a — tiesė, A — jos taškas (230 pav.). Šalia tiesės a pasirinkime bet kokį tašką X. Per tą tašką ir tiesę a išveskime plokštumą α (14.1 teorema). Plokštumoje α per tašką A galima išvesti tiesę b, statmeną tiesei a. Tai ir reikėjo įrodyti.



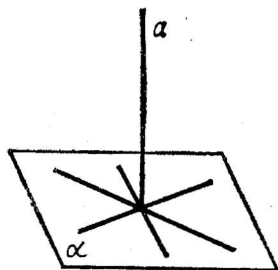
230 pav.

Plokštumą kertanti tiesė, kuri statmena kiekvienai plokštumos tiesei, einančiai per tiesės ir plokštumos susikirtimo tašką, vadinama *statmena* tai plokštumai.

Tiesė a (231 pav.) statmena plokštumai α.

16.2 teorema. ***Jei plokštumą kertanti tiesė yra statmena dviem tos plokštumos tiesėms, einančioms per susikirtimo tašką, tai ta tiesė statmena plokštumai.***

Įrodymas. Sakykime, a — tiesė, kertanti plokštumą α taške A ir statmena tos plokštumos tiesėms b ir c, einančioms per tašką A (232 pav.). Įrodysime, kad tiesė a statmena plokštumai α.

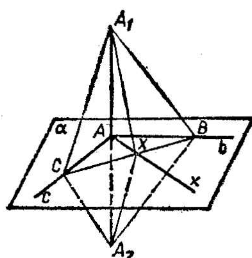


231 pav.

Plokštumoje α per tašką A išveskime bet kokią tiesę x. Įrodysime, kad tiesė a statmena tiesei x.

Plokštumoje α išveskime bet kokią tiesę, neinančią per tašką A ir kertančią tieses b, c ir x. Sakykime, susikirtimo taškai yra B, C ir X.

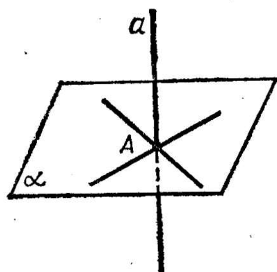
Tiesėje a nuo taško A į skirtingas puses atidėkime lygias atkarpas AA_1 ir AA_2. Trikampis A_1CA_2 lygiašonis, nes AC yra jo aukštinė (taip duota sąlygoje) ir pusiaukraštinė (taip parinkome taškus A_1 ir A_2). Panašiai įrodome, kad trikampis A_1BA_2 yra lygiašonis. Iš to, remiantis trečiuoju trikampių lygumo požymiu, išeina, kad trikampiai A_1BC ir A_2BC lygūs. Iš jų lygumo gauname, kad kampai A_1BX ir A_2BX lygūs. Tada, remiantis pirmuoju trikampių lygumo požymiu, trikampiai A_1BX ir A_2BX yra lygūs, taigi jų kraštinės A_1X ir A_2X lygios, o trikampis A_1XA_2 — lygiašonis. To trikampio pusiaukraštinė XA yra ir aukštinė. Taigi tiesė a statmena tiesei x. Teorema įrodyta.



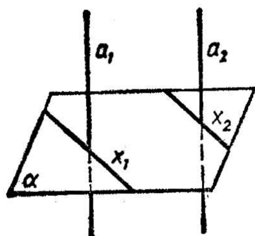
232 pav.

Uždavinys (4). Įrodykite, kad per kiekvieną tiesės tašką galima išvesti jai statmeną plokštumą.

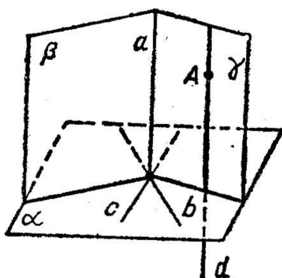
Sprendimas. Sakykime, a — tiesė, A — jos taškas (233 pav.). Per tašką A išveskime dvi skirtingas jai statmenas tieses (žr. 1 uždavinį). Per tas tieses išveskime plokštumą α (aksioma S_3). Plokštuma α eina per tašką A ir yra statmena tiesei a (16.2 teorema).



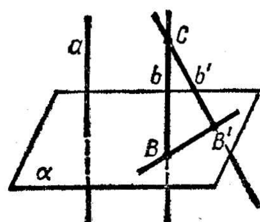
233 pav.



234 pav.



235 pav.



236 pav.

16.3 teorema. ***Jei plokštuma statmena vienai iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji statmena ir kitai.***

Įrodymas. Sakykime, a_1 ir a_2 — lygiagrečios tiesės, o α — plokštuma, statmena tiesei a_1 (234 pav.). Įrodysime, kad ta plokštuma statmena ir tiesei a_2. Plokštumoje α per jos ir tiesės a_2 susikirtimo tašką išveskime bet kokią tiesę x_2. Per tiesės a_1 ir plokštumos α susikirtimo tašką išveskime tiesę x_1, lygiagrečią tiesei x_2. Ji yra plokštumoje α. Kadangi tiesė a_1 statmena plokštumai α, tai a_1 ir x_1 yra statmenos tiesės. Remiantis 16.1 teorema, joms lygiagrečios susikertančios tiesės a_2 ir x_2 irgi statmenos. Taigi tiesė a_2 statmena kiekvienai plokštumos α tiesei, einančiai per tiesės a_2 ir plokštumos α susikirtimo tašką. Vadinasi, tiesė a_2 statmena plokštumai α. Teorema įrodyta.

Uždavinys (6). Įrodykite, kad per kiekvieną tašką *A* galima išvesti tiesę, statmeną kiekvienai plokštumai α.

Sprendimas. Plokštumoje α išveskime dvi susikertančias tieses *b* ir *c* (235 pav.). Per jų susikirtimo tašką išveskime plokštumas β ir γ, statmenas atitinkamai tiesėms *b* ir *c*. Jos susikirs tam tikra tiese *a*. Tiesė *a* statmena tiesėms *b* ir *c*, todėl statmena ir plokštumai α. Per tašką *A* išveskime tiesę *d*, lygiagrečią tiesei *a*. Remiantis 16.3 teorema, tiesė *d* yra statmena plokštumai α.

16.4 teorema. ***Dvi tiesės, statmenos tai pačiai plokštumai, yra lygiagrečios.***

Įrodymas. Sakykime, *a* ir *b* — dvi tiesės, statmenos plokštumai α (236 pav.). Tarkime, kad tiesės *a* ir *b* yra nelygiagrečios. Per kurį nors tiesės *b* tašką *C* išveskime tiesę *b′*, lygiagrečią tiesei *a*. Tiesė *b′* statmena plokštumai α (16.3 teorema). Sakykime, *B* ir *B′* — tiesių *b* ir *b′* ir plokštumos α susikirtimo taškai. Tada tiesė *BB′* yra statmena susikertančioms tiesėms *b* ir *b′*, o tai negalima. Gavome prieštarą. Teorema įrodyta.

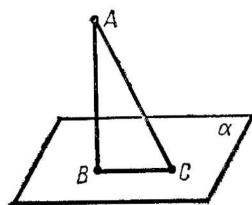
STATMUO IR PASVIROJI

Statmeniu plokštumai, išvestu iš kurio nors taško, vadinama atkarpa, jungianti tą tašką su plokštumos tašku ir esanti plokštumai statmenoje tiesėje. Tos atkarpos galas, esantis plokštumoje, vadinamas *statmens pagrindu*. *Atstumu* nuo taško iki plokštumos vadinamas statmens plokštumai, išvesto iš to taško, ilgis.

Pasvirąja plokštumai, išvesta iš kurio nors taško, vadinama kiekviena jai nestatmena atkarpa, kurios vienas galas yra minėtas taškas, kitas galas — plokštumos taškas. Atkarpos galas, esantis plokštumoje, vadinamas *pasvirosios pagrindu*. Atkarpa, jungianti statmens ir pasvirosios, išvestų iš to paties taško, pagrindus vadinama *pasvirosios projekcija*.

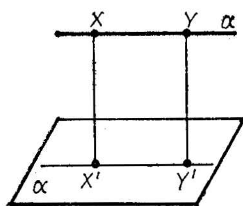
Iš taško A (237 pav.) išvestas statmuo AB plokštumai α ir pasviroji AC. Taškas B — statmens pagrindas, taškas C — pasvirosios pagrindas, atkarpa BC — pasvirosios AC projekcija plokštumoje α.

Uždavinys (9). Įrodykite: jei tiesė lygiagreti plokštumai, tai visi jos taškai yra vienodai nutolę nuo tos plokštumos.



237 pav.

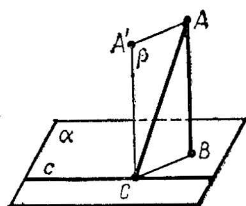
Sprendimas. Sakykime, a ir α — tiesė ir plokštuma (238 pav.). Tiesėje a pasirinkime du taškus X ir Y. Jų atstumai nuo plokštumos α — statmenų XX' ir YY', išvestų į tą plokštumą, ilgiai. Remiantis 16.4 teorema, tiesės XX' ir YY' lygiagrečios, todėl yra vienoje plokštumoje. Ta plokštuma kerta plokštumą α tiese $X'Y'$. Tiesė a lygiagreti tiesei $X'Y'$, nes nekerta per ją einančios plokštumos α. Taigi keturkampio $XX'Y'Y$ priešingosios kraštinės lygiagrečios. Vadinasi, tas keturkampis yra lygiagretainis, todėl $XX'=YY'$. Tai ir reikėjo įrodyti.



238 pav.

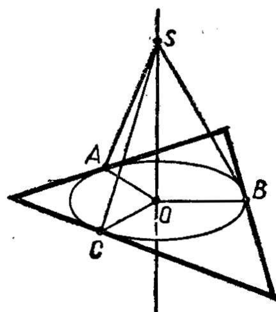
16.4 teorema (trijų statmenų teorema). ***Tiesė, išvesta plokštumoje per pasvirosios pagrindą ir statmena jos projekcijai, yra statmena ir pasvirajai.*** Atvirkščiai, ***jei plokštumoje esanti tiesė yra statmena pasvirajai, tai ji statmena ir pasvirosios projekcijai.***

Įrodymas. Sakykime, AB — statmuo plokštumai α, AC — pasviroji ir c — plokštumos α tiesė, einanti per pasvirosios pagrindą C (239 pav.). Išveskime tiesę CA', statmeną plokštumai α. Ji lygiagreti tiesei AB (16.4 teorema). Per tieses AB ir $A'C$ išveskime plokštumą β. Tiesė c statmena



239 pav.

tiesei CA'. Jei ji statmena tiesei CB, tai statmena ir plokštumai β, taigi ir tiesei AC. Panašiai, jei tiesė c statmena pasvirajai CA, tai, kadangi ji statmena ir tiesei CA', statmena plokštumai β, taigi ir pasvirosios projekcijai BC. Teorema įrodyta.



240 pav.

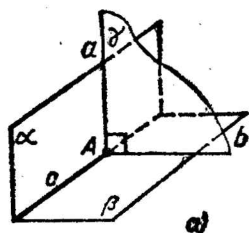
Uždavinys (32). Per įbrėžto į trikampį apskritimo centrą išvesta trikampio plokštumai statmena tiesė. Įrodykite, kad kiekvienas tos tiesės taškas yra vienodai nutolęs nuo trikampio kraštinių.

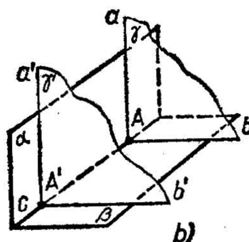
Sprendimas. Sakykime, A, B, C — trikampio kraštinių ir apskritimo lietimosi taškai, O — apskritimo centras ir S — išvestojo statmens taškas (240 pav.). Kadangi spindulys OA statmenas trikampio kraštinei, todėl, remiantis trijų statmenų teorema, atkarpa SA yra statmuo tai kraštinei, o jo ilgis — atstumas nuo taško S iki trikampio kraštinės. Remiantis Pitagoro teorema, $SA = \sqrt{AO^2+OS^2} = \sqrt{r^2+OS^2}$; r — įbrėžtinio apskritimo spindulys. Panašiai rastume: $SB = \sqrt{r^2+OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2+OS^2}$, t. y. visi atstumai nuo taško S iki trikampio kraštinių yra lygūs.

PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS

Statmenomis plokštumomis vadinamos dvi susikertančios plokštumos, kurių susikirtimo tiesei statmena trečioji plokštuma kerta tas plokštumas statmenomis tiesėmis.

Plokštumos α ir β yra statmenos, c — jų susikirtimo tiesė (241 pav., *a*). Tiesei c statmena plokštuma γ kerta plokštumas α ir β statmenomis tiesėmis a ir b. Plokštumų α ir β statmenumas nepriklauso nuo apibrėžime minimos plokštumos γ. Iš tikrųjų, jei γ' yra kita plokštuma, statmena tiesei c, tai jos ir plokštumų α ir β susikirtimo tiesės a' ir b' yra statmenos tiesei c ir lygiagrečios atitinkamai tiesėms a ir b (241 pav., *b*). Remiantis 16.1 teorema, iš tiesių a ir b statmenumo išplaukia tiesių a' ir b' statmenumas.

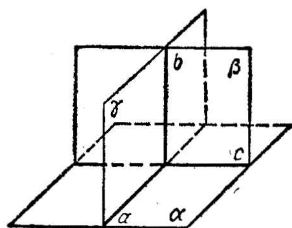




241 pav.

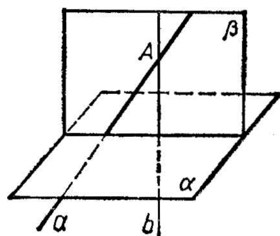
16.6 teorema. ***Jei plokštuma eina per tiesę, statmeną kitai plokštumai, tai ji yra statmena tai plokštumai.***

Įrodymas. Sakykime, α — plokštuma, b — jai statmena tiesė, β — plokštuma, einanti per tiesę b, ir c — plokštumų α ir β susikirtimo tiesė (242 pav.). Įro-



242 pav.

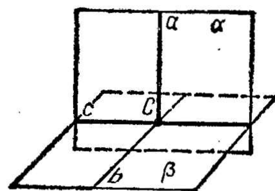
dysime, kad plokštumos α ir β yra statmenos. Plokštumoje α per jos ir tiesės b susikirtimo tašką išveskime tiesę a, statmeną tiesei c. Per tieses a ir b išveskime plokštumą γ. Ji statmena tiesei c, nes tiesė c statmena tiesėms a ir b. Kadangi tiesės a ir b statmenos, tai plokštumos α ir β statmenos. Teorema įrodyta.



243 pav.

U ž d a v i n y s (52). Per tiesę a išveskite plokštumą, statmeną plokštumai α.

S p r e n d i m a s. Per bet kurį tiesės a (243 pav.) tašką išveskime tiesę b, statmeną plokštumai α (6 uždavinys). Per tieses a ir b išveskime plokštumą β. Remiantis 16.6 teorema, plokštuma β yra statmena plokštumai α.



244 pav.

16.7 t e o r e m a. ***Jei vienoje iš dviejų statmenų plokštumų išvesime tiesę, statmeną tų plokštumų susikirtimo tiesei, tai ji bus statmena kitai plokštumai.***

Į r o d y m a s. Sakykime, α ir β — statmenos plokštumos, c — jų susikirtimo tiesė, a — plokštumos α tiesė, statmena tiesei c (244 pav.). Įrodysime, kad tiesė a statmena plokštumai β. Per tiesių a ir c susikirtimo tašką C plokštumoje β išveskime tiesę b, statmeną tiesei c. Per tieses a ir b einanti plokštuma γ yra statmena tiesei c, nes joje esančios tiesės a ir b yra statmenos tiesei c. Kadangi plokštumos α ir β statmenos, tai tiesės a ir b statmenos. Be to, tiesė a statmena tiesei c (duota sąlygoje), todėl tiesė a statmena plokštumai β. Teorema įrodyta.

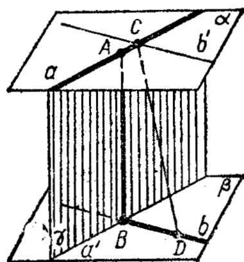
ATSTUMAS TARP PRASILENKIANČIŲ TIESIŲ

Dviejų prasilenkiančių tiesių *bendruoju statmeniu* vadinama atkarpa, kurios galai yra tose tiesėse ir kuri statmena kiekvienai jų.

Įrodysime, kad ***dvi prasilenkiančios tiesės turi bendrą statmenį, ir kad toks statmuo yra tik vienas. Jis yra per tas tieses einančių lygiagrečių plokštumų bendras statmuo.***

Į r o d y m a s. Sakykime, a ir b — prasilenkiančios tiesės (245 pav.). Per jas išveskime lygiagrečias plokštumas α ir β (§ 15, 16 uždavinys). Tiesės, kertančios tiesę a ir statmenos

plokštumai α, yra vienoje plokštumoje (γ). Tos plokštumos ir plokštumos β susikirtimo tiesė a' yra lygiagreti tiesei a. Sakykime, B — tiesių a' ir b susikirtimo taškas. Tada tiesė AB, kuri yra statmena plokštumai α, yra statmena ir plokštumai β, nes tos plokštumos yra lygiagrečios. Atkarpa AB — plokštumų α ir β bendras statmuo, vadinasi, ir tiesių a bei b bendras statmuo.



245 pav.

Sakykime, tiesės a ir b turi kitą bendrą statmenį CD. Per tašką C išveskime tiesę b', lygiagrečią tiesei b. Tiesė CD statmena tiesei b, todėl ji statmena ir tiesei b'. Kadangi tiesė CD statmena tiesei a, tai ji statmena plokštumai α, todėl lygiagreti tiesei AB. Per lygiagrečias tieses AB ir CD galima išvesti plokštumą. Toje plokštumoje būtų ir nagrinėjamos prasilenkiančios tiesės AC ir BD, o tai negalima. Teorema įrodyta.

Atstumu tarp prasilenkiančiųjų tiesių vadinamas jų bendrojo statmens ilgis. *Jis lygus atstumui tarp lygiagrečių plokštumų, einančių per tas tieses.*

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kokios tiesės erdvėje vadinamos statmenomis?
2. Įrodykite, kad susikertančios tiesės, lygiagrečios statmenoms tiesėms, yra viena kitai statmenos.
3. Pasakykite tiesės ir plokštumos statmenumo apibrėžimą.
4. Įrodykite: jei tiesė, kertanti plokštumą, yra statmena dviem tos plokštumos tiesėms, tai ji statmena plokštumai.
5. Įrodykite: jei plokštuma statmena vienai iš dviejų lygiagrečių tiesių, tai ji statmena ir kitai.
6. Įrodykite, kad dvi tiesės, statmenos tai pačiai plokštumai, yra lygiagrečios.
7. Kas yra statmuo, išvestas iš taško į plokštumą?
8. Ką vadiname atstumu nuo taško iki plokštumos?
9. Kas yra pasviroji, išvesta iš taško į plokštumą? Kas yra pasvirosios projekcija?
10. Įrodykite trijų statmenų teoremą.
11. Kokios plokštumos vadinamos statmenomis?
12. Įrodykite: jei plokštuma eina per tiesę, statmeną plokštumai, tai ji statmena tai plokštumai.
13. Įrodykite: jei vienoje iš dviejų statmenų plokštumų išvesta tiesė, statmena plokštumų susikirtimo tiesei, tai ji statmena kitai plokštumai.
14. Kas yra prasilenkiančių tiesių bendrasis statmuo?

15. Įrodykite, kad prasilenkiančios tiesės turi bendrą statmenį, ir kad toks statmuo yra tik vienas. Įrodykite, kad jis yra per tas tieses einančių lygiagrečių plokštumų bendras statmuo.
16. Ką vadiname atstumu tarp prasilenkiančių tiesių?

PRATIMAI

1. Įrodykite, kad erdvėje per kiekvieną tiesės tašką galima išvesti jai statmeną tiesę.
2. Įrodykite, kad erdvėje per kiekvieną tiesės tašką galima išvesti dvi skirtingas jai statmenas tieses.
3. Tiesės AB, AC ir AD kas dvi yra viena kitai statmenos. Raskite atkarpą CD, kai: 1) $AB=3$ cm, $BC=7$ cm, $AD=1{,}5$ cm; 2) $BD=9$ cm, $BC=16$ cm, $AD=5$ cm; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$.
4. Įrodykite, kad per kiekvieną tiesės tašką galima išvesti jai statmeną plokštumą.
5. Įrodykite, kad per kiekvieną plokštumos tašką galima išvesti jai statmeną tiesę.
6. Įrodykite, kad per kiekvieną tašką A galima išvesti tiesę, statmeną kiekvienai plokštumai α.
7. Įrodykite, kad per tašką, nesantį plokštumoje, negalima išvesti daugiau kaip vieną tiesę, statmeną tai plokštumai.
8. Lygiakraščio trikampio kraštinė a. Taškas A nuo trikampio viršūnių nutolęs atstumu a. Raskite atstumą nuo taško A iki trikampio plokštumos.
9. Įrodykite: jei tiesė lygiagreti plokštumai, tai visi jos taškai yra vienodai nutolę nuo tos plokštumos.
10. Įrodykite, kad atstumai nuo visų plokštumos taškų iki jai lygiagrečios plokštumos yra lygūs.
11. Iš taško į plokštumą išvestos vienodo ilgio pasvirosios. Raskite jų pagrindų geometrinę vietą.
12. Iš taško į plokštumą išvestos dvi pasvirosios, lygios 10 cm ir 17 cm. Tų pasvirųjų projekcijų skirtumas lygus 9 cm. Apskaičiuokite pasvirųjų projekcijas.
13. Iš taško į plokštumą išvestos dvi pasvirosios, kurių viena 26 cm ilgesnė už kitą. Pasvirųjų projekcijos lygios 12 cm ir 40 cm. Apskaičiuokite pasvirąsias.
14. Iš taško į plokštumą išvestos dvi pasvirosios, kurių ilgių santykis yra $1:2$. Pasvirųjų projekcijos lygios 1 cm ir 7 cm. Apskaičiuokite pasvirųjų ilgius.
15. Iš taško į plokštumą išvestos dvi pasvirosios, lygios 23 cm ir 33 cm. Pasvirųjų projekcijų santykis yra $2:3$. Raskite atstumą nuo to taško iki plokštumos.
16. Per apibrėžto apie trikampį apskritimo centrą išvesta trikampio plokštumai statmena tiesė. Įrodykite, kad kiekvienas tos tiesės taškas yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių.
17. Iš taško S, esančio šalia plokštumos α, išvestos į tą plokštumą trys lygios pasvirosios SA, SB, SC ir statmuo SO. Įro-

dykite, kad statmens pagrindas O yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras.

18. Atstumas tarp dviejų lygiagrečių plokštumų lygus a. Atkarpa, kurios ilgis b, savo galais remiasi į tas plokštumas. Raskite atkarpos projekciją kiekvienoje plokštumoje.

19. Atkarpų ilgis a ir b. Jų galai yra dviejose lygiagrečiose plokštumose. Vienos atkarpos (jos ilgis a) projekcija plokštumoje lygi c. Raskite kitos atkarpos projekciją.

20. Atstumai nuo atkarpos galų iki plokštumos lygūs 0,3 m ir 0,5 m. Atkarpa nekerta plokštumos. Koks taško, dalijančio tą atkarpą santykiu 3 : 7, atstumas iki plokštumos?

21. Per atkarpos vidurio tašką išvesta plokštuma. Įrodykite, kad atkarpos galai yra vienodai nutolę nuo tos plokštumos.

22. Per lygiagretainio įstrižainę išvesta plokštuma. Įrodykite, kad kitos įstrižainės galai yra vienodai nutolę nuo plokštumos.

23. Raskite atstumą nuo atkarpos AB vidurio taško iki jos nekertančios plokštumos, kai atstumai nuo taškų A ir B iki plokštumos lygūs: 1) 3,2 cm ir 5,3 cm; 2) 7,4 cm ir 6,1 cm; 3) a ir b.

24. Išspręskite panašų į 23 uždavinį, kai atkarpa AB kerta plokštumą.

25. Atkarpa, kurios ilgis 1 m, kerta plokštumą. Atstumai nuo jos galų iki plokštumos lygūs 0,5 m ir 0,3 m. Apskaičiuokite atkarpos projekcijos plokštumoje ilgį.

26. Nuo telefono stulpo iki namo nutiestas telefono laidas. Laido ilgis 15 m. Prie stulpo laidas pritvirtintas 8 m aukštyje nuo žemės paviršiaus, o prie namo — 20 m aukštyje. Raskite atstumą tarp namo ir stulpo. Laikykite, kad laidas yra tiesus.

27. Per trapecijos pagrindą išvesta plokštuma, nuo kito pagrindo nutolusi atstumu a. Trapecijos pagrindų santykis $m : n$. Raskite atstumą nuo trapecijos įstrižainių susikirtimo taško iki plokštumos.

28. Per lygiagretainio kraštinę išvesta plokštuma, kurios atstumas nuo priešingos kraštinės lygus a. Raskite atstumą nuo lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taško iki tos plokštumos.

29. Iš taškų A ir B į plokštumą α išvesti statmenys. Statmenys lygūs 3 m ir 2 m, atstumas tarp jų pagrindų lygus 2,4 m. Atkarpa AB nekerta plokštumos. Raskite atstumą tarp taškų A ir B.

30. Atstumas tarp dviejų vertikalių stulpų lygus 3,4 m. Vieno stulpo aukštis 5,8 m, kito — 3,9 m. Stulpų viršūnes jungia skersinis. Raskite skersinio ilgį.

31. Atstumas nuo taško A iki kvadrato viršūnių lygus a. Kvadrato kraštinė lygi b. Raskite atstumą nuo taško A iki kvadrato plokštumos.

32. Per įbrėžto į trikampį apskritimo centrą išvesta trikampio plokštumai statmena tiesė. Įrodykite, kad kiekvienas tos tiesės taškas yra vienodai nutolęs nuo trikampio kraštinių.

33. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 0,7 m. Iš apskritimo centro išvestas statmuo trikampio plokštumai. Statmens ilgis 2,4 m. Raskite atstumą nuo to statmens galo iki trikampio kraštinių.

34. Atstumas nuo taško iki trikampio plokštumos lygus 1,1 m, o iki kiekvienos trikampio kraštinės — 6,1 m. Apskaičiuokite į trikampį įbrėžto apskritimo spindulį.

35. Iš lygiakraščio trikampio ABC viršūnės išvestas statmuo AD trikampio plokštumai; $AD=13$ cm, $BC=6$ cm. Apskaičiuokite atstumą nuo taško D iki kraštinės BC.

36. Atkarpos AB ilgis b. Per jos galą A išvesta atkarpai statmena plokštuma, o toje plokštumoje — tiesė. Atstumas nuo taško A iki tos tiesės lygus a. Raskite atstumą nuo taško B iki tiesės.

37. Atstumas nuo taško A iki kiekvienos kvadrato kraštinės lygus a. Kvadrato įstrižainė lygi d. Raskite atstumą nuo taško A iki kvadrato plokštumos.

38. Iš kvadrato viršūnės išvestas statmuo jo plokštumai. Atstumai nuo to statmens galo iki kitų kvadrato viršūnių lygūs a ir b $(a<b)$. Raskite statmens ilgį ir kvadrato kraštinę.

39. Iš stačiakampio viršūnės išvestas statmuo jo plokštumai. Atstumai nuo to statmens galo iki kitų stačiakampio viršūnių lygūs a, b, c $(a<c,\ b<c)$. Raskite statmens ilgį ir stačiakampio kraštines.

40. Taškas M yra šalia stačiojo kampo plokštumos. Atstumas nuo to taško iki kampo viršūnės lygus a, o iki kampo kraštinių — b. Raskite atstumą nuo taško M iki kampo plokštumos.

41. Iš stačiakampio $ABCD$ viršūnės A išvestas statmuo AK jo plokštumai. Atstumai nuo taško K iki kitų stačiakampio viršūnių lygūs 6 m, 7 m ir 9 m. Apskaičiuokite statmens AK ilgį.

42. Iš taško į plokštumą išvestos dvi lygios pasvirosios, kurių kiekvienos ilgis 2 m. Pasvirosios sudaro 60° kampą, o jų projekcijos statmenos. Apskaičiuokite atstumą nuo taško iki plokštumos.

43. Taško atstumas nuo plokštumos lygus 1 m. Iš to taško į plokštumą išvestos dvi lygios pasvirosios. Pasvirosios viena kitai statmenos, o su statmeniu plokštumai sudaro 60° kampus. Raskite atstumą tarp pasvirųjų pagrindų.

44. Per stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnę C išvesta plokštuma, lygiagreti įžambinei ir nutolusi nuo jos 1 m atstumu. Statinių projekcijos toje plokštumoje lygios 3 m ir 5 m. Apskaičiuokite įžambinę.

45. Per vieną rombo kraštinę 4 m atstumu nuo jai priešingos kraštinės išvesta plokštuma. Rombo įstrižainių projekcijos toje plokštumoje lygios 8 m ir 2 m. Raskite rombo kraštinių projekcijas.

46. Lygiakraščio trikampio kraštinė lygi 3 m. Raskite atstumą nuo trikampio plokštumos iki taško, kuris nuo kiekvienos trikampio viršūnės nutolęs 2 m atstumu.
47. Lygiašonio trikampio pagrindas 6 m, šoninė kraštinė 5 m. Iš įbrėžto į tą trikampį skritulio centro išvestas 2 m ilgio statmuo trikampio plokštumai. Raskite atstumą nuo to statmens galo iki trikampio kraštinių.
48. Lygiašonio trikampio pagrindas ir aukštinė lygūs po 4 m. Taškas, kurio atstumas nuo trikampio plokštumos lygus 6 m, yra vienodai nutolęs nuo trikampio viršūnių. Apskaičiuokite tą atstumą.
49. Atkarpa AB lygiagreti plokštumai, į kurią iš atkarpos galų išvestas statmuo AC ir pasviroji BD, statmena atkarpai AB. Raskite atstumą CD, kai $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$.
50. Iš stačiojo trikampio ABC, kurio kampas C status, smailiojo kampo viršūnės išvestas statmuo AD trikampio plokštumai; $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$. Raskite atstumą nuo taško D iki viršūnių B ir C.
51. Iš trikampio ABC stačiojo kampo C viršūnės išvestas statmuo CD trikampio plokštumai; $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$. Raskite atstumą nuo taško D iki trikampio įžambinės.
52. Per tiesę a išveskite plokštumą, statmeną plokštumai α.
53. Įrodykite, kad visos tiesės, statmenos plokštumai α ir kertančios tiesę a, yra vienoje plokštumoje, statmenoje plokštumai α.
54. Iš taškų A ir B, esančių dviejose statmenose plokštumose, išvesti statmenys AC ir BD tų plokštumų susikirtimo tiesei. Raskite atkarpos AB ilgį, kai: 1) $AC=6$ m, $BD=7$ m, $CD=6$ m; 2) $AC=3$ m, $BD=4$ m, $CD=12$ m; 3) $AD=4$ m, $BC=7$ m, $CD=1$ m; 4) $AD=BC=5$ m, $CD=1$ m; 5) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 6) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$.
55. Dvi plokštumos statmenos viena kitai. Taško atstumai nuo tų plokštumų lygūs a ir b. Raskite atstumą nuo to taško iki plokštumų susikirtimo tiesės.
56. Iš lygiakraščio trikampio ABC viršūnių A ir B išvesti statmenys AA_1 ir BB_1 trikampio plokštumai. Atkarpa A_1B_1 nekerta trikampio plokštumos, $AB=2$ m, $CA_1=3$ m, $CB_1=7$ m. Apskaičiuokite atstumą nuo viršūnės C iki atkarpos A_1B_1 vidurio taško.
57. Iš stačiojo trikampio ABC smailiųjų kampų viršūnių A ir B išvesti statmenys AA_1 ir BB_1 trikampio plokštumai. Atkarpa A_1B_1 nekerta trikampio plokštumos, $A_1C=4$ m, $A_1A=3$ m, $B_1C=6$ m, $B_1B=2$ m. Apskaičiuokite atstumą nuo viršūnės C iki atkarpos A_1B_1 vidurio taško.
58. Plokštumos α ir β viena kitai statmenos. Atstumas nuo plokštumos α taško A iki plokštumų susikirtimo tiesės c lygus 0,5 m. Plokštumoje β išvesta tiesė b, lygiagreti tiesei c ir nutolusi nuo jos 1,2 m atstumu. Raskite atstumą nuo taško A iki tiesės b.

59. Statmenų plokštumų α ir β susikirtimo tiesė yra c. Plokštumoje α išvesta tiesė $a \parallel c$, plokštumoje β — tiesė $b \parallel c$. Atstumas tarp tiesių a ir c lygus 1,5 m, o tarp tiesių b ir c — 0,8 m. Raskite atstumą tarp tiesių a ir b.

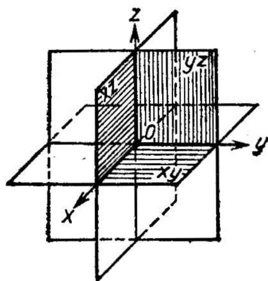
60. Per tiesės a tašką A išvestos jai statmenos plokštuma β ir tiesė b. Įrodykite, kad tiesė b yra plokštumoje β.

§ 17. DEKARTINĖS KOORDINATĖS IR VEKTORIAI ERDVĖJE

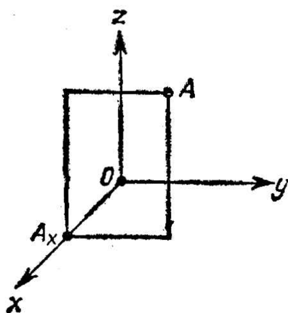
ERDVĖS KOORDINAČIŲ APIBRĖŽIMAS

Pasirinkime tris viena kitai statmenas tieses x, y, z, susikertančias viename taške O (246 pav.). Per kiekvieną tų tiesių porą išveskime plokštumą. Plokštuma, einanti per tieses x ir y, vadinama plokštuma xy. Kitos dvi plokštumos vadinamos xz ir yz. Tiesės x, y, z vadinamos *koordinačių ašimis*, jų susikirtimo taškas O — *koordinačių pradžia*, o plokštumos xy, yz ir xz — *koordinačių plokštumomis*. Taškas O kiekvieną koordinačių ašį dalija į dvi pustieses — pusašes. Vieną jų laikysime teigiamąja, kitą — neigiamąja.

Pasirinkime bet kokį tašką A ir per jį išveskime plokštumą, lygiagrečią plokštumai yz (247 pav.). Ji kirs x ašį tam tikrame taške A_x. Taško A *koordinate* x vadinamas skaičius, kuris apibrėžiamas taip: jo modulis lygus atkarpos OA_x ilgiui; jis teigiamas, kai taškas A_x yra teigiamoje pusašėje x, neigiamas, kai tas taškas yra neigiamojoje pusašėje; jei taškas A_x sutampa su tašku O, tai $x=0$. Panašiai apibrėžiamos taško A koordinatės y ir z. Taško koordinatės rašomos skliaustuose, šalia jį žyminčios raidės: $A(x, y, z)$. Kartais taškas žymimas jo koordinatėmis: (x, y, z).



246 pav.



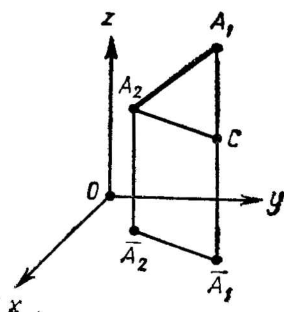
247 pav.

Uždavinys (1). Kurie iš taškų $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(0, 0, 3)$, $D(1, 2, 0)$ yra: 1) plokštumoje xy; 2) z ašyje; 3) plokštumoje yz?

Sprendimas. Plokštumos xy taškų koordinatė z lygi nuliui. Todėl tik taškas D yra plokštumoje xy. Plokštumos yz taškų koordinatė x lygi nuliui. Vadinasi, taškai B ir C yra plokštumoje yz. Ašies z taškų dvi koordinatės (x ir y) lygios nuliui. Vadinasi, taškas C yra z ašyje.

Atstumą tarp dviejų taškų $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $A_2(x_2, y_2, z_2)$ *išreikškime tų taškų koordinatėmis.*

Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai tiesė A_1A_2 yra nelygiagreti z ašiai (248 pav.). Per taškus A_1 ir A_2 išveskime tieses, lygiagrečias z ašiai. Jos kirs plokštumą xy taškuose $\bar{A}_1$ ir $\bar{A}_2$. Tų taškų koordinatės x, y tos pačios, kaip ir taškų A_1, A_2, o koordinatė z lygi nuliui. Per tašką A_2 išveskime plokštumą, lygiagrečią plokštumai xy. Ji kirs tiesę $A_1\bar{A}_1$ tam tikrame taške C. Remiantis Pitagoro teorema,



248 pav.

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Atkarpos CA_2 ir $\bar{A}_1\bar{A}_2$ lygios, o

$$\bar{A}_1\bar{A}_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Atkarpos A_1C ilgis lygus $|z_1 - z_2|$. Vadinasi,

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Jei atkarpa A_1A_2 lygiagreti z ašiai, tai $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Tas pats išeitų ir iš gautosios formulės, kadangi šiuo atveju $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Taigi atstumo tarp taškų A_1 ir A_2 formulė yra

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Uždavinys (4). Plokštumoje xy raškite tašką $D(x, y, 0)$, vienodai nutolusį nuo trijų taškų: $A(0, 1, -1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, -1, 0)$.

Sprendimas.

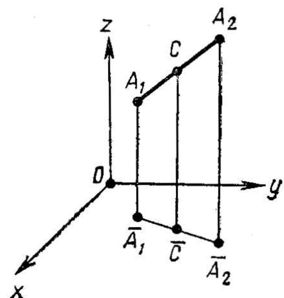
$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

Iš to, kad pirmieji du atstumai lygūs trečiajam, gauname dvi lygtis koordinatėms x ir y rasti:

$$-4y + 1 = 0, \quad 2x - 2y + 1 = 0.$$

Iš čia $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Ieškomasis taškas $D\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

Sakykime, $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — bet kokie du taškai. *Atkarpos A_1A_2 vidurio taško C koordinates x, y, z išreikškime jos galų A_1 ir A_2 koordinatėmis* (249 pav.). Tam per taškus A_1, A_2 ir C išveskime tieses, lygiagrečias z ašiai. Jos kirs plokštumą xy taškuose $\bar{A}_1(x_1, y_1, 0)$, $\bar{A}_2(x_2, y_2, 0)$ ir $\bar{C}(x, y, 0)$. Remiantis Talio teorema, taškas $\bar{C}$ yra atkarpos $\bar{A}_1\bar{A}_2$ vidurio taškas. Iš planimetrijos atsimename formules atkarpos vidurio taško koordina-



249 pav.

tėms, išreikšti jos galų koordinatėmis. Plokštumos xy atveju jos yra tokios:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Norint gauti z išraišką, vietoj plokštumos xy pakanka imti plokštumą xz arba yz. Gautume tokią formulę:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Uždavinys (8). Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$, kurio viršūnės yra taškai $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 1, 4)$, $D(2, 2, 2)$,— lygiagretainis.

Sprendimas. Keturkampis, kurio įstrižainės susikerta, o susikirtimo taškas jas dalija pusiau, yra lygiagretainis. Atkarpos AC vidurio taško koordinatės yra:

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\quad y=\frac{3+1}{2}=2,\quad z=\frac{2+4}{2}=3.$$

Atkarpos BD vidurio taško koordinatės yra:

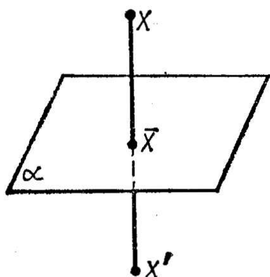
$$x=\frac{0+2}{2}=1,\quad y=\frac{2+2}{2}=2,\quad z=\frac{4+2}{2}=3.$$

Atkarpų AC ir BD vidurio taškų koordinatės vienodos. Vadinasi, tos atkarpos susikerta, susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija pusiau, keturkampis $ABCD$ — lygiagretainis.

FIGŪRŲ TRANSFORMACIJA ERDVĖJE

Figūrų transformacijos erdvėje sąvoka apibrėžiama taip pat, kaip ir figūrų transformacijos plokštumoje sąvoka (§ 9). Taip pat, kaip ir plokštumos atveju, apibrėžiama simetrija taško bei tiesės atžvilgiu ir homotetija.

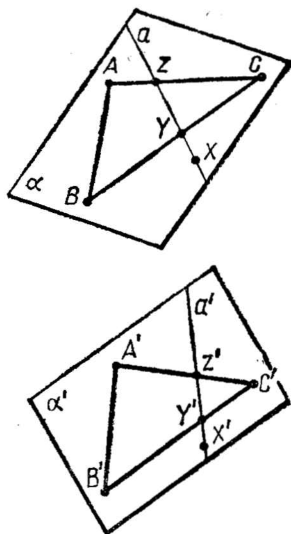
Be simetrijos taško ir tiesės atžvilgiu, erdvėje nagrinėjama simetrija plokštumos atžvilgiu. Ta transformacija apibrėžiama šitaip (250 pav.). Sakykime, α — bet kokia fiksuota plokštuma. Iš figūros taško X išvedame į plokštumą α statmenį $X\bar{X}$ ir jo tęsinyje už taško $\bar{X}$ atidėkime atkarpą $\bar{X}X'$, lygią atkarpai $X\bar{X}$. Transformacija, kuri tašką X perveda į jam *simetrišką* tašką X', vadinama simetrija plokštumos α atžvilgiu. Jei simetrija plokštumos α atžvilgiu figūrą perveda į ją pačią, tai figura vadinama *simetriška plokštumos* α atžvilgiu, o plokštuma α vadinama *simetrijos plokštuma*.



250 pav.

Uždavinys (15). Raskite taškus, simetriškus taškams (1, 2, 3), (0, −1, 2), (1, 0, −3) koordinačių plokštumų atžvilgiu.

Sprendimas. Taškas, simetriškas taškui (1, 2, 3) plokštumos xy atžvilgiu, yra plokštumai xy statmenoje tiesėje, todėl jo koordinatės x ir y yra tokios pačios: $x=1$, $y=2$; nuo plokštumos xy jis nutolęs tokiu pačiu atstumu, todėl jo koordinatė z skiriasi tik ženklu, t. y. $z=-3$. Taigi taškas, simetriškas taškui (1, 2, 3) plokštumos xy atžvilgiu, yra (1, 2, −3). Panašiai randamos ir kitų taškų koordinatės.



251 pav.

Taip pat, kaip ir plokštumoje, apibrėžiama judesio erdvėje sąvoka. *Judesiu* vadinama transformacija, kuri nekeičia atstumo tarp taškų. ***Erdvėje simetrija taško, tiesės ir plokštumos atžvilgiu yra judesiai.***

Taip pat, kaip ir plokštumoje, įrodoma, kad judesys erdvėje tiesę perveda į tiesę, pustiesę — į pustiesę, atkarpą — į atkarpą ir nekeičia kampų tarp pustiesių.

Nauja judesio erdvėje savybė yra tokia: ***judesys plokštumą perveda į plokštumą.*** Įrodysime.

Sakykime, α — bet kokia plokštuma (251 pav.). Joje pažymėkime bet kokius tris taškus A, B, C, esančius ne vienoje tiesėje. Judesys juos perves į tris taškus A', B', C', kurie irgi bus ne vienoje tiesėje. Per tuos taškus išveskime plokštumą α'. Įrodysime, kad nagrinėjamas judesys plokštumą α perveda į plokštumą α'. Sakykime, X — bet kuris plokštumos α taškas. Per jį plokštumoje α išveskime kokią nors tiesę a, kertančią trikampį ABC dviejuose taškuose Y ir Z. Judesys tiesę a perveda į tam tikrą tiesę a'. Tiesės a taškai Y ir Z bus pervesti į taškus Y' ir Z', priklausančius trikampiui $A'B'C'$, taigi ir plokštumai α'. Vadinasi, tiesė a' yra plokštumoje α'. Taškas X bus pervestas į tiesės a' tašką X', o jis yra plokštumos α' taškas. Teiginys įrodytas.

Lygiagrečiuoju postūmiu erdvėje vadinama tokia transformacija, kuri kiekvieną figūros tašką (x, y, z) perveda į tašką $(x+a, y+b, z+c)$; čia a, b, c — pastovūs skaičiai. Lygiagretusis postūmis erdvėje apibūdinamas formulėmis

$$x'=x+a, \quad y'=y+b, \quad z'=z+c.$$

Jos išreiškia taško, į kurį lygiagretusis postūmis perveda tašką (x, y, z), koordinates x', y', z'. Taip pat, kaip ir plokštumos atveju, įrodomos šitokios lygiagrečiojo postūmio savybės.

1. Lygiagretusis postūmis yra judesys.
2. Atliekant lygiagretųjį postūmį, taškai pasislenka lygiagrečiomis (arba sutampančiomis) tiesėmis vienodu atstumu.

3. Lygiagrečiuoju postūmiu kiekviena tiesė pervedama į jai lygiagrečią tiesę (arba į tą pačią tiesę).

4. Kad ir kokie būtų taškai A ir A', yra vienintelis lygiagretusis postūmis, kuris tašką A perveda į tašką A'.

5. Du lygiagretieji postūmiai, atlikti vienas po kito, sudaro lygiagretųjį postūmį.

6. Lygiagrečiajam postūmiui atvirkštinė transformacija yra lygiagretusis postūmis.

Uždavinys (17). Raskite a, b, c reikšmes lygiagrečiojo postūmio formulėse $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, kai taškas $A(1, 0, 2)$ pervedamas į tašką $A'(2, 1, 0)$.

Sprendimas. Į lygiagrečiojo postūmio formulės įrašę taškų A ir A' koordinates, t. y. $x=1$, $y=0$, $z=2$, $x'=2$, $y'=1$, $z'=0$, gauname lygtis, iš kurių reikia rasti a, b, c:

$$2=1+a, \quad 1=0+b, \quad 0=2+c.$$

Iš čia $a=1$, $b=1$, $c=-2$.

Nauja lygiagrečiojo postūmio erdvėje savybė šitokia.

7. ***Atliekant lygiagretųjį postūmį erdvėje, kiekviena plokštuma pervedama arba į tą pačią plokštumą, arba į jai lygiagrečią plokštumą.***

Įrodymas. Sakykime, α — bet kokia plokštuma. Toje plokštumoje išveskime dvi susikertančias tieses a ir b. Lygiagretusis postūmis erdvėje tieses a ir b perveda į tieses a' ir b'; a' bus lygiagreti a (arba sutaps su ja), b' bus lygiagreti b (arba sutaps su ja). Plokštuma α pereis į tam tikrą plokštumą α', einančią per tieses a' ir b'. Jei plokštuma α' nesutaps su plokštuma α, tai, remiantis 15.4 teorema, ji bus lygiagreti plokštumai α. Teiginys įrodytas.

Kaip ir plokštumos atveju, apibrėžiama homotetija ir panašumo transformacija erdvėje bei įrodoma, kad homotetija erdvėje yra panašumo transformacija.

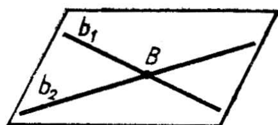
KAMPAI TARP TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ

Dvi susikertančios tiesės sudaro gretutinius ir kryžminius kampus. Kryžminiai kampai lygūs, o gretutiniai kampai vienas kitą papildo iki 180°. Mažesniojo jų kampinis matas vadinamas *kampu tarp tiesių*. Atskirai apibrėžiama, kad kampas tarp statmenų tiesių lygus 90°. Laikoma, kad kampas tarp lygiagrečių tiesių lygus nuliui.

Kampu tarp prasilenkiančių tiesių vadinamas kampas tarp susikertančių joms lygiagrečių tiesių. Tas kampas nepriklauso nuo to, kokias susikertančias tieses pasirinksime. Įrodysime.

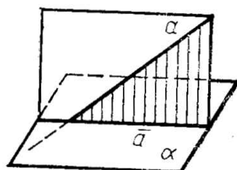
Sakykime, a_1 ir a_2 — nagrinėjamoms prasilenkiančioms tiesėms lygiagrečios tiesės, susikertančios taške A, o b_1 ir b_2 — toms

pačioms tiesėms lygiagrečios tiesės, susikertančios taške B (252 pav.). Remiantis 15.2 teorema, tiesės a_1 ir b_1 yra lygiagrečios (arba sutampa), tiesės a_2 ir b_2 irgi lygiagrečios (arba sutampa). Atlikime lygiagretųjį postūmį, kuris tašką A pervestų į tašką B. Kadangi lygiagrečiuoju postūmiu kiekviena tiesė pervedama arba į tą pačią tiesę, arba į lygiagrečią tiesę, tai tiesė a_1 pervedama į tiesę b_1, o tiesė a_2 — į tiesę b_2. Kadangi lygiagretusis postūmis nekeičia kampo didumo, tai kampas tarp tiesių a_1 ir a_2 lygus kampui tarp tiesių b_1 ir b_2. Tai ir reikėjo įrodyti.



252 pav.

Ankstesniame apibrėžime statmenomis buvo pavadintos tiesės, susikertančios stačiu kampu. Kai kada prasilenkiančios tiesės, kampas tarp kurių lygus 90°, irgi vadinamos statmenomis.



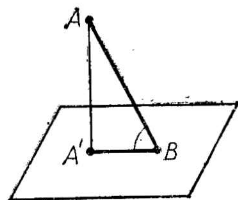
253 pav.

Apibrėšime *kampo tarp tiesės ir plokštumos* sąvoką. Sakykime, α — plokštuma ir a — ją kertanti tiesė (253 pav.). Statmenų, išvestų iš tiesės a taškų į plokštumą α, pagrindai yra tiesėje $\bar{a}$. Ta tiesė vadinama tiesės *a projekcija* plokštumoje α. *Kampu tarp tiesės ir plokštumos* vadinamas kampas tarp tos tiesės ir jos projekcijos plokštumoje. Laikoma, kad kampas tarp viena kitai lygiagrečių tiesės ir plokštumos lygus nuliui, o kampas tarp viena kitai statmenų tiesės ir plokštumos lygus 90°. Kadangi tiesė a, jos projekcija $\bar{a}$ plokštumoje α ir statmuo plokštumai α, išvestas iš jos susikirtimo su tiese a taško, yra vienoje plokštumoje, tai *kampas tarp tiesės ir plokštumos papildo iki* 90° *kampą tarp tos tiesės ir statmens plokštumai.*

Uždavinys (20). Taškas A nutolęs nuo plokštumos atstumu h. Raskite iš to taško išvestos pasvirosios ilgį, kai pasviroji su plokštuma sudaro: 1) 30° kampą; 2) 45° kampą; 3) 60° kampą.

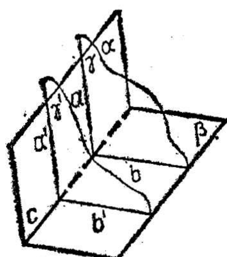
Sprendimas. Išveskime į plokštumą statmenį AA' (254 pav.). Trikampis $AA'B$ — status, nes kampas prie viršūnės A' — status. To trikampio smailusis kampas, esantis prieš statinį AA', lygus 30° (atitinkamai 45°, 60°).

Todėl pirmuoju atveju pasviroji $AB=\frac{AA'}{\sin 30°}=$ $=2h$. Antruoju atveju $AB=h\sqrt{2}$, trečiuoju — $AB=\frac{2h}{\sqrt{3}}$.

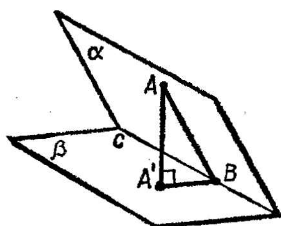


254 pav.

Apibrėšime *kampo tarp plokštumų* sąvoką. Laikoma, kad kampas tarp lygiagrečių plokštumų lygus nuliui.



255 pav.



256 pav.

Nagrinėkime susikertančias plokštumas. Išveskime plokštumą, statmeną plokštumų susikirtimo tiesei. Ji kirs nagrinėjamas plokštumas dviem tiesėmis. Kampas tarp tų tiesių vadinamas *kampu tarp plokštumų* (255 pav.). Taip apibrėžtas kampas nepriklauso nuo kertančiosios plokštumos pasirinkimo. Įrodysime tai.

Sakykime, α ir β — nagrinėjamos plokštumos, c — jų susikirtimo tiesė. Išveskime plokštumą γ, statmeną tiesei c. Jos susikirtimo su plokštumomis α ir β tieses pažymėkime a ir b. Kampas tarp plokštumų α ir β lygus kampui tarp tiesių a ir b. Pasirinkime kitą kertančiąją plokštumą γ', statmeną tiesei c. Sakykime, a' ir b' — tos plokštumos susikirtimo su plokštumomis α ir β tiesės. Atlikime lygiagretųjį postūmį, plokštumos γ ir tiesės c susikirtimo tašką pervesdami į plokštumos γ' ir tiesės c susikirtimo tašką. Tiesė a bus pervesta į tiesę a', o tiesė b — į tiesę b'. Vadinasi, kampai tarp tiesių a ir b bei a' ir b' yra lygūs. Teiginys įrodytas.

Uždavinys (24). Dvi plokštumos susikerta 30° kampu. Vienos jų taškas A nutolęs nuo kitos plokštumos atstumu a. Raskite atstumą nuo to taško iki plokštumų susikirtimo tiesės.

Sprendimas. Sakykime, α ir β — plokštumos, A — plokštumos α taškas (256 pav.). Išveskime statmenį AA' į plokštumą β ir statmenį AB į plokštumų susikirtimo tiesę c. Remiantis trijų statmenų teorema, $A'B \perp c$. Stačiojo trikampio ABA' kampas prie viršūnės B lygus 30°. Tada

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Atstumas nuo taško A iki tiesės c lygus $2a$.

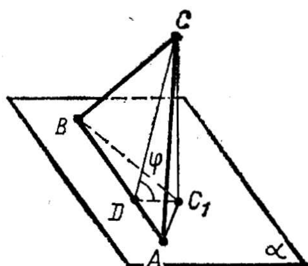
DAUGIAKAMPIO STATMENOSIOS PROJEKCIJOS PLOTAS

Figūros *statmenąja projekcija* plokštumoje vadinama jos lygiagrečioji projekcija, kurios projektavimo kryptis statmena plokštumai.

17.1 teorema. ***Daugiakampio statmenosios projekcijos plokštumoje plotas lygus jo ploto ir kampo tarp daugiakampio plokštumos ir projekcijos plokštumos kosinuso sandaugai.***

Įrodymas. Iš pradžių išnagrinėkime trikampį ir jo projekciją plokštumoje, einančioje per vieną jo kraštinę (257 pav.).

Trikampio ABC projekcija yra trikampis ABC_1 plokštumoje α. Išveskime trikampio aukštinę CD. Remiantis trijų statmenų teorema, atkarpa C_1D — trikampio ABC_1 aukštinė. Kampas CDC_1 lygus kampui tarp trikampio ABC plokštumos ir projekcijos plokštumos α. Tada $C_1D = CD \cos\varphi$,



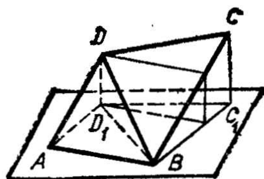
257 pav.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$

Iš čia

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cos\varphi.$$



258 pav.

Taigi šiuo atveju teiginys teisingas. Jis teisingas ir tuo atveju, kai vietoj plokštumos α yra jai lygiagreti plokštuma. Mat figūros projekcijas lygiagrečiose plokštumose galima sutapdinti lygiagrečiuoju postūmiu projektavimo kryptimi, o lygiagrečiuoju postūmiu sutapdinamos figūros yra lygios.

Išnagrinėkime bendrąjį atvejį. Nagrinėjamąjį daugiakampį padalykime į trikampius. Kiekvieną trikampį, kuris neturi projekcijos plokštumai lygiagrečios kraštinės, padalykime į du trikampius, turinčius bendrą projekcijos plokštumai lygiagrečią kraštinę, kaip parodyta 258 paveiksle keturkampio $ABCD$ atveju.

Kiekvienam dalinio trikampiui $\triangle$ ir jo projekcijai $\overline{\triangle}$ rašome lygybę $S_{\overline{\triangle}} = S_{\triangle} \cos\varphi$. Visas tas lygybes panariui sudedame. Kairiojoje pusėje gausime daugiakampio projekcijos plotą, o dešiniojoje — daugiakampio plotą, padaugintą iš $\cos\varphi$. Teorema įrodyta.

VEKTORIAI ERDVĖJE

Erdvėje, kaip ir plokštumoje, *vektoriumi* vadinama kryptinė atkarpa. Taip pat, kaip ir plokštumos atveju, apibrėžiamos vektorių erdvėje pagrindinės sąvokos: vektoriaus ilgis (modulis), vektoriaus kryptis, vektorių lygumas.

Vektoriaus, kurio pradžia yra taškas $A_1(x_1, y_1, z_1)$, o pabaiga — taškas $A_2(x_2, y_2, z_2)$, *koordinatėmis* vadinami skaičiai $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Taip pat, kaip ir plokštumos atveju, įrodoma, kad lygių vektorių atitinkamos koordinatės lygios, ir atvirkščiai, vektoriai, kurių atitinkamos koordinatės lygios, yra lygūs. Tuo remiantis, vektorių galima žymėti jo koordinatėmis: $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$, arba $\overline{(a_1, a_2, a_3)}$.

U ž d a v i n y s (32). Duoti keturi taškai: $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$. Iš vektorių $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ir $\overline{BD}$ išrinkite lygius vektorius.

S p r e n d i m a s. Reikia rasti vektorių $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... koordinates ir atitinkamas koordinates palyginti. Lygūs tie vektoriai, kurių atitinkamos koordinatės lygios. Pavyzdžiui, vektoriaus $\overline{AB}$ koordinatės: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. Tokios pat ir vektoriaus $\overline{DC}$ koordinatės: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Vadinasi, vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{DC}$ lygūs. $\overline{BC}$ ir $\overline{AD}$ yra kita lygių vektorių pora.

Taip pat, kaip ir plokštumos atveju, apibrėžiami vektorių veiksmai: sudėtis, daugyba iš skaičiaus, skaliarinė daugyba.

Vektorių $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ ir $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ *suma* vadiname vektorių $\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

Kaip ir plokštumoje, įrodoma vektorinė lygybė $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.

Vektoriaus $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ ir skaičiaus λ *sandauga* vadiname vektorių $\lambda\bar{a}=\overline{(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)}$. Kaip ir plokštumoje, įrodoma, kad vektoriaus $\lambda\bar{a}$ ilgis lygus $|\lambda||\bar{a}|$, o kryptis sutampa su vektoriaus $\bar{a}$ kryptimi, kai $\lambda>0$, ir priešinga vektoriaus $\bar{a}$ krypčiai, kai $\lambda<0$.

U ž d a v i n y s (35). Raskite vektoriui $\bar{a}(1, 2, 3)$ kolinearų vektorių, kurio pradžia būtų taškas $A(1, 1, 1)$, o pabaiga B būtų plokštumoje xy.

S p r e n d i m a s. Taško B koordinatė z lygi nuliui. Vektoriaus $\overline{AB}$ koordinatės: $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. Kadangi vektoriai $\bar{a}$ ir $\overline{AB}$ yra kolinearūs, tai

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Iš čia randame taško B koordinates x, y:

$$x=\frac{2}{3}, \quad y=\frac{1}{3}.$$

Vektorių $\overline{(a_1, a_2, a_3)}$ ir $\overline{(b_1, b_2, b_3)}$ *skaliarine sandauga* vadiname skaičių $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Taip pat, kaip ir plokštumos atveju, įrodoma, kad vektorių skaliarinė sandauga lygi jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandaugai.

U ž d a v i n y s (40). Duoti keturi taškai: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. Raskite kampo φ tarp vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ kosinusą.

S p r e n d i m a s. Randame vektoriaus $\overline{AB}$ koordinates ir ilgį:

$$1-0=1, \quad -1-1=-2, \quad 2-(-1)=3;$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Randame vektoriaus $\overline{CD}$ koordinates ir ilgį:

$$2-3=-1, \ -3-1=-4, \ 1-0=1;$$
$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Vadinasi,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\,|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

Panašiai kaip ir plokštumos vektorius, erdvės vektorius galima išreikšti šitaip:

$$\bar{a}(a_1, a_2, a_3)=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3;$$

čia $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ir $\bar{e}_3$ — koordinačių ašių krypčių vienetiniai vektoriai. Iš tikrųjų,

$$\overline{(a_1, a_2, a_3)}=\overline{(a_1, 0, 0)}+\overline{(0, a_2, 0)}+\overline{(0, 0, a_3)}=$$
$$=a_1\overline{(1, 0, 0)}+a_2\overline{(0, 1, 0)}+a_3\overline{(0, 0, 1)}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3.$$

PLOKŠTUMOS LYGTIS

Sudarysime plokštumos lygtį. Sakykime, $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — koks nors plokštumos taškas, $\bar{n}(a, b, c)$ — plokštumai statmenas vektorius, $A(x, y, z)$ — bet koks plokštumos taškas (259 pav.). Vektoriai $\overline{A_0A}$ ir $\bar{n}$ statmeni, todėl jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Vektoriaus $\overline{A_0A}$ koordinatės lygios $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. Kadangi $\overline{A_0A}\cdot\bar{n}=0$, tai

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (*)$$

Atvirkščiai, jei taškas $A(x, y, z)$ tenkina tą lygtį, tai $\overline{A_0A}\cdot\bar{n}=0$. Vadinasi, taškas A yra plokštumoje. Taigi *lygtis (*) yra nagrinėjamosios plokštumos lygtis.*

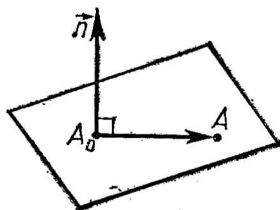
Plokštumos lygties

$$ax+by+cz+d=0$$

koeficientai a, b, c yra plokštumai statmeno vektoriaus koordinatės.

Uždavinys (49). Duoti taškai $A(1, 2, 3)$ ir $B(0, 1, -1)$. Plokštuma eina per tašką A ir statmena tiesei AB. Sudarykite plokštumos lygtį.

Sprendimas. Vektorius $\overline{AB}$ yra plokštumai statmenas vektorius. Jo koordinatės -1, -1, -4, todėl plokštumos lygtį galima parašyti taip: $(-1)x+$



259 pav.

$+(-1)y+(-4)z+d=0$. Kadangi taškas A yra plokštumoje, tai jo koordinatės turi tenkinti tą lygtį:

$$(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-4)\cdot 3+d=0.$$

Iš čia $d=15$. Ieškomoji plokštumos lygtis

$$-x-y-4z+15=0.$$

Kiekvieną tiesę visiškai nusako dvi plokštumos, einančios per tą tiesę. Iš čia išplaukia, kad kiekviena tiesė erdvėje nusakoma dviem tiesinėmis lygtimis — per tą tiesę einančių plokštumų lygtimis:

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0,$$
$$b_1x+b_2y+b_3z+b_4=0.$$

Taškas (x, y, z), tenkinantis tas dvi lygtis, priklauso kiekvienai iš plokštumų, vadinasi, priklauso tiesei. Atvirkščiai, kiekvieno tiesės taško koordinatės tenkina abi lygtis, nes tas taškas priklauso kiekvienai iš plokštumų.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kur yra erdvės taškai, kurių koordinatės x ir y lygios nuliui?
2. Atstumą tarp dviejų taškų išreikškite tų taškų koordinatėmis.
3. Išveskite formules atkarpos vidurio taško koordinatėms išreikšti jos galų koordinatėmis.
4. Kas yra simetrija taško atžvilgiu? Kokia figūra vadinama simetriška centro atžvilgiu?
5. Paaiškinkite, kas yra simetrija plokštumos atžvilgiu. Ką vadiname figūros simetrijos plokštuma?
6. Kokia figūros transformacija vadinama judesiu?
7. Įrodykite, kad simetrija taško atžvilgiu yra judesys.
8. Įrodykite, kad simetrija koordinačių plokštumos xy atžvilgiu nusakoma formulėmis $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$. Įrodykite, kad simetrija plokštumos atžvilgiu yra judesys.
9. Įrodykite, kad judesys erdvėje plokštumą perveda į plokštumą.
10. Pasakykite lygiagrečiojo postūmio apibrėžimą.
11. Įrodykite, kad lygiagrečiuoju postūmiu kiekviena plokštuma pervedama arba į tą pačią plokštumą, arba į lygiagrečią plokštumą.
12. Pasakykite kampo tarp tiesių apibrėžimą.
13. Įrodykite, kad kampas φ tarp tiesių, einančių per vektorius $\bar{a}$ ir $\bar{b}$, randamas iš lygties

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

14. Pasakykite kampo tarp tiesės ir plokštumos apibrėžimą.
15. Pasakykite kampo tarp plokštumų apibrėžimą.
16. Ką vadiname figūros statmenąja projekcija plokštumoje?

17. Įrodykite, kad daugiakampio statmenosios projekcijos plotas lygus jo ploto ir kampo tarp daugiakampio plokštumos ir jo projekcijos plokštumos kosinuso sandaugai.
18. Pasakykite vektoriaus, kurio pradžia yra taškas $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ir pabaiga $A_2(x_2, y_2, z_2)$, koordinačių apibrėžimą.
19. Ką vadiname vektoriaus ilgiu? Kokie vektoriai vadinami vienakrypčiais?
20. Pasakykite vektorių veiksmų: sudėties, daugybos iš skaičiaus, skaliarinės daugybos apibrėžimus.
21. Įrodykite, kad kiekvieną vektorių $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ galima išreikšti šitaip: $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$; iš čia $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ — koordinačių ašių krypčių vienetiniai vektoriai.
22. Išveskite plokštumos lygtį.
23. Kokia plokštumos lygties $ax+by+cz+d=0$ koeficientų a, b, c geometrinė prasmė?
24. Kokiomis lygtimis nusakoma tiesė erdvėje?

PRATIMAI

1. Kurie iš taškų $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(0, 0, 3)$, $D(1, 2, 0)$ yra: 1) plokštumoje xy; 2) z ašyje; 3) plokštumoje yz?
2. Raskite statmenų, išvestų iš taško $A(1, 2, 3)$ į koordinačių ašis ir koordinačių plokštumas, pagrindus.
3. Raskite atstumus nuo taško $(1, 2, -3)$ iki: 1) koordinačių plokštumų; 2) koordinačių ašių; 3) koordinačių pradžios.
4. Plokštumoje xy raskite tašką $D(x, y, 0)$, vienodai nutolusį nuo trijų taškų: $A(0, 1, -1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, -1, 0)$.
5. Raskite taškus, vienodai nutolusius nuo taškų $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, o nuo plokštumos yz nutolusius atstumu 2.
6. Ašyje x raskite tašką $C(x, 0, 0)$, vienodai nutolusį nuo taškų $A(1, 2, 3)$ ir $B(-2, 1, 3)$.
7. Sudarykite geometrinės taškų vietos, kurios kiekvienas taškas vienodai nutolęs nuo taško $A(1, 2, 3)$ ir nuo koordinačių pradžios, lygtį.
8. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$, kurio viršūnės yra taškai $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 1, 4)$, $D(2, 2, 2)$,— lygiagretainis.
9. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis, kai: 1) $A(0, 2, -3)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(2, -2, -1)$, $D(3, -1, -5)$; 2) $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, 7)$, $C(-2, 1, 5)$, $D(-1, 2, 1)$.
10. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra rombas, kai: 1) $A(6, 7, 8)$, $B(8, 2, 6)$, $C(4, 3, 2)$, $D(2, 8, 4)$; 2) $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 0, 2)$, $D(1, 2, 2)$.
11. Raskite atkarpos galą $B(x, y, z)$, kai žinomas galas $A(2, 3, -1)$ ir vidurio taškas $C(1, 1, 1)$.
12. Raskite lygiagretainio $ABCD$ viršūnės D koordinates, kai žinomos kitų trijų jo viršūnių koordinatės: 1) $A(2, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$; 2) $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-1, 0, 1)$; 3) $A(4, 2, -1)$, $B(1, -3, 2)$, $C(-4, 2, 1)$.

13. Atkarpos galai yra taškai $A(a, c, -b)$ ir $B(-a, d, b)$. Įrodykite, kad jos vidurys yra y ašyje.

14. Atkarpos galai yra taškai $C(a, b, c)$ ir $D(p, q, -c)$. Įrodykite, kad jos vidurys yra plokštumoje xy.

15. Raskite taškus, simetriškus taškams (1, 2, 3), (0, −1, 2), (1, 0, −3) koordinačių plokštumų atžvilgiu.

16. Raskite taškus, simetriškus taškams (1, 2, 3), (0, −1, 2), (1, 0, −3) koordinačių pradžios atžvilgiu.

17. Raskite a, b, c reikšmes lygiagrečiojo postūmio formulėse $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, kai taškas $A(1, 0, 2)$ pervedamas į tašką $A'(2, 1, 0)$.

18. Lygiagrečiuoju postūmiu taškas $A(2, 1, -1)$ pervedamas į tašką $A'(1, -1, 0)$. Į kokį tašką pervedama koordinačių pradžia?

19. Ar yra lygiagretusis postūmis, kuriuo taškas A pervedamas į tašką B, o taškas C — į tašką D, kai: 1) $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(3, -2, 1)$, $D(2, -3, 0)$; 2) $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, -3, 6)$, $D(7, -2, 5)$; 3) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, -2, 2)$, $D(2, -3, 1)$; 4) $A(1, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(-2, 2, 1)$, $D(1, 1, 1)$?

20. Taškas A nutolęs nuo plokštumos atstumu h. Raskite iš to taško išvestos pasvirosios ilgį, kai pasviroji su plokštuma sudaro: 1) 30° kampą; 2) 45° kampą; 3) 60° kampą.

21. Pasviroji lygi a. Kokia yra tos pasvirosios projekcija plokštumoje, kai pasviroji su plokštuma sudaro: 1) 45° kampą; 2) 60° kampą; 3) 30° kampą?

22. Atkarpa, kurios ilgis 10 m, kerta plokštumą; atstumai nuo jos galų iki plokštumos 2 m ir 3 m. Raskite kampą tarp atkarpos ir plokštumos.

23. Du lygiašoniai trikampiai turi bendrą pagrindą, o jų plokštumos sudaro 60° kampą. Bendras pagrindas lygus 16 m; vieno trikampio šoninė kraštinė lygi 17 m, o kito trikampio šoninės kraštinės viena kitai statmenos. Raskite atstumą tarp trikampių viršūnių.

24. Dvi plokštumos susikerta 30° kampu. Vienos jų taškas A nutolęs nuo kitos plokštumos atstumu a. Raskite atstumą nuo to taško iki plokštumų susikirtimo tiesės.

25. Lygiašoniai trikampiai ABC ir ABD, turintys bendrą pagrindą AB, yra skirtingose plokštumose; kampas tarp tų plokštumų lygus α. Raskite $\cos\alpha$, kai: 1) $AB=24$ m, $AC=13$ m, $AD=$ $=37$ m, $CD=35$ m; 2) $AB=32$ m, $AC=65$ m, $AD=20$ m, $CD=63$ m.

26. Raskite kampą tarp plokštumų, kai vienos jų taškas nuo plokštumų susikirtimo tiesės nutolęs du kartus toliau negu nuo antrosios plokštumos.

27. Iš taško, nutolusio nuo plokštumos atstumu a, išvestos dvi pasvirosios, sudarančios su plokštuma 45° ir 30° kampus, o viena su kita — statųjį kampą. Raskite atstumą tarp pasvirųjų galų.

28. Iš taško, nutolusio nuo plokštumos atstumu a, išvestos dvi

pasvirosios, sudarančios su plokštuma 45° kampus, o viena su kita — 60° kampą. Raskite atstumą tarp pasvirųjų galų.

29. Per lygiašonio stačiojo trikampio statinį išvesta plokštuma, kuri su kitu statiniu sudaro 45° kampą. Raskite kampą tarp įžambinės ir plokštumos.

30. Iš taško, nutolusio nuo plokštumos atstumu a, išvestos dvi pasvirosios, sudarančios su plokštuma 30° kampus; kampas tarp pasvirųjų projekcijų lygus 120°. Raskite atstumą tarp pasvirųjų galų.

31. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 7 m ir 24 m. Raskite atstumą nuo stačiojo kampo viršūnės iki plokštumos, kuri eina per įžambinę ir su trikampio plokštuma sudaro 30° kampą.

32. Duoti keturi taškai: $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -1)$. Iš vektorių $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ir $\overline{BD}$ išrinkite lygius vektorius.

33. Duoti trys taškai: $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$. Raskite tašką $D(x, y, z)$, kai: 1) vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ lygūs; 2) vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ suma lygi nuliui.

34. Kokios turi būti m ir n reikšmės, kad nurodyti vektoriai būtų kolinearūs: 1) $\bar{a}(2, n, 3)$, $\bar{b}(3, 2, m)$; 2) $\bar{a}(m, 2, 5)$, $\bar{b}(1, -1, n)$; 3) $\bar{a}(m, n, 2)$, $\bar{b}(6, 9, 3)$?

35. Raskite vektoriui $\bar{a}(1, 2, 3)$ kolinearų vektorių, kurio pradžia būtų taškas $A(1, 1, 1)$, o pabaiga B būtų plokštumoje xy.

36. Kokia turi būti n reikšmė, kad nurodyti vektoriai būtų statmeni: 1) $\bar{a}(2, -1, 3)$, $\bar{b}(1, 3, n)$; 2) $\bar{a}(n, -2, 1)$, $\bar{b}(n, -n, 1)$; 3) $\bar{a}(n, -2, 1)$, $\bar{b}(n, 2n, 4)$; 4) $\bar{a}(4, 2n, -1)$, $\bar{b}(-1, 1, n)$?

37. Duoti trys taškai: $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(0, 2, -1)$. Raskite tokį z ašies tašką $D(0, 0, c)$, kad vektoriai $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ būtų statmeni.

38. Vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{b}$ sudaro 60° kampą, o vektorius $\bar{c}$ jiems statmenas. Raskite vektoriaus $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ ilgį.

39. Vienetiniai vektoriai $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vienas su kitu sudaro 60° kampus. Raskite kampą φ tarp vektorių: 1) $\bar{a}$ ir $\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}$ ir $\bar{b}-\bar{c}$.

40. Duoti keturi taškai: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. Raskite kampo φ tarp vektorių $\overline{AB}$ ir $\overline{CD}$ kosinusą.

41. Duoti trys taškai: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$. Raskite trikampio ABC kampo C kosinusą.

42. Iš trikampio ABC viršūnės A išvestas statmuo AD trikampio plokštumai. Kampas ABD lygus α, o kampas ABC lygus β. Raskite kampo φ tarp vektorių $\overline{BC}$ ir $\overline{BD}$ kosinusą.

43. Pasviroji su plokštuma sudaro 45° kampą. Plokštumoje per pasvirosios pagrindą išvesta tiesė, su pasvirosios projekcija sudaranti 45° kampą. Raskite kampą φ tarp tos tiesės ir pasvirosios.

44. Iš taško, esančio šalia plokštumos, išvestas statmuo ir dvi lygios pasvirosios, su statmeniu sudarančios kampus α;

kampas tarp pasvirųjų lygus β. Raskite kampą φ tarp pasvirųjų projekcijų.

45. Raskite vienetinį vektorių, kolinearų vektoriui $\bar{a}(2, 1, -2)$.

46. Duoti du taškai: $A(1, 0, 2)$ ir $B(-1, 1, 1)$. Raskite vektoriui $\overline{AB}$ kolinearaus ir su juo vienakrypčio vienetinio vektoriaus $\bar{e}(a, b, c)$ koordinates.

47. Kada vektorius $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ lygiagretus z ašiai?

48. Kada plokštuma, nusakyta lygtimi $ax+by+cz+d=0$, lygiagreti plokštumai xy?

49. Duoti taškai $A(1, 2, 3)$ ir $B(0, 1, -1)$. Plokštuma eina per tašką A ir statmena tiesei AB. Sudarykite plokštumos lygtį.

50. Plokštuma eina per tašką A ir yra statmena tiesei AB. Sudarykite plokštumos lygtį, kai: 1) $A(-1, 1, 2)$, $B(2, 0, 1)$; 2) $A(1, 0, -1)$, $B(4, 3, -3)$; 3) $A(3, -4, 5)$, $B(2, 1, 2)$.

51. Raskite atkarpas, kurias plokštuma $ax+by+cz+d=0$ iškerta koordinačių ašyse (a, b, c, d nelygūs nuliui).

52. Įrodykite, kad plokštumų, nusakytų lygtimis $a_1x+b_1y=d_1$, $a_2x+b_2y=d_2$, susikirtimo tiesė lygiagreti z ašiai.

53. Įrodykite, kad plokštumos, nusakytos lygtimis $ax+by+cz+d=0$, $ax+by+cz+d_1=0$, neturi bendrų taškų, jei $d \neq d_1$.

54. Įrodykite, kad kiekviena plokštuma, lygiagreti plokštumai $ax+by+cz+d=0$, nusakoma lygtimi $ax+by+cz+d'=0$, kurioje $d' \neq d$.

55. Plokštuma nusakyta lygtimi $ax+by+cz+d=0$. Kokią sąlygą turi tenkinti taško $P(k, l, m)$ koordinatės, kad tiesė, einanti per tą tašką ir koordinačių pradžią, būtų statmena plokštumai?

56. Plokštuma eina per koordinačių pradžią ir statmena tiesei OP; $P(k, l, m)$. Raskite plokštumos lygtį.

57. Raskite trijų plokštumų susikirtimo tašką, kai žinomos tų plokštumų lygtys:

1) $x+y+z=1$, $x-2y=0$, $2x+y+3z+1=0$;
2) $x-y=3$, $y+z=2$, $x-z=4$;
3) $x+2=0$, $2x-y=3$, $3x+2y-z=8$;
4) $x+2y+3z=1$, $3x+y+2z=2$, $2x+3y+z=3$.

58. Įrodykite, kad plokštumos, nusakytos lygtimis $x+y+z=1$, $2x+y+3z+1=0$, $x+2z+1=0$, neturi nė vieno bendro taško.

59. Kada plokštuma, nusakyta lygtimi $ax+by+cz+d=0$: 1) lygiagreti z ašiai; 2) eina per z ašį?

60. Kada plokštuma, nusakyta lygtimi $ax+by+cz+d=0$, statmena plokštumai xy?

61. Plokštuma apibūdinta lygtimi $2x+3y+z=1$. Nurodykite kokį nors plokštumai lygiagretų vektorių.

62. Nurodykite kokį nors vektorių, lygiagretų plokštumų $2x+3y+z=1$, $x+y+z=1$ susikirtimo tiesei.

§ 18. BRIAUNAINIAI

DAUGIASIENIAI KAMPAI

Dvisieniu kampu vadinama figūra, sudaryta iš dviejų pusplokštumių, kurias riboja ta pati tiesė (260 pav.). Pusplokštumės vadinamos dvisienio kampo *sienomis*, o jas ribojanti tiesė — dvisienio kampo *briauna*.

Dvisienio kampo briaunai statmena plokštuma kerta to kampo sienas dviem pustiesėmis. Tų pustiesių sudarytas kampas vadinamas dvisienio kampo *tiesiniu kampu*. Dvisienio kampo matu laikomas jį atitinkančio tiesinio kampo matas. Dvisienio kampo visi tiesiniai kampai sutapdinami lygiagrečiuoju postūmiu, vadinasi, jie yra lygūs. Iš to išplaukia, kad *dvisienio kampo matas nepriklauso nuo tiesinio kampo parinkimo*.

Uždavinys (1). Iš taškų A ir B, esančių dvisienio kampo sienose, išvesti į jo briauną statmenys AA_1 ir BB_1; $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$, dvisienis kampas lygus α (261 pav.). Raskite atkarpos AB ilgį.

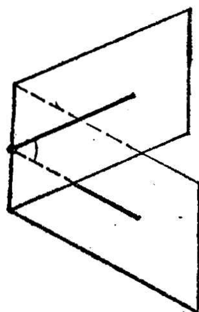
Sprendimas. Išveskime tieses $A_1C \parallel BB_1$ ir $BC \parallel A_1B_1$. Tiesė A_1B_1 statmena trikampio AA_1C plokštumai, nes ji statmena dviem tos plokštumos tiesėms AA_1 ir CA_1. Vadinasi, jai lygiagreti tiesė BC irgi statmena tai plokštumai. Tada ABC — statusis trikampis, C — jo statusis kampas. Remiantis kosinusų teorema,

$$AC^2=AA_1^2+A_1C^2-2AA_1\cdot A_1C\cdot\cos\alpha=a^2+b^2-2ab\cos\alpha.$$

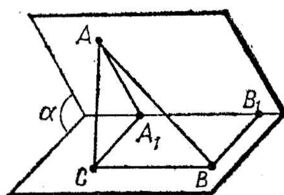
Remiantis Pitagoro teorema,

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha+c^2}.$$

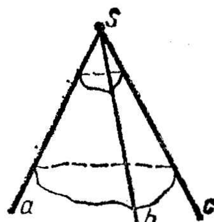
Trisieniu kampu (abc) vadinama figūra, kurią sudaro trys plokštieji kampai: (ab), (bc) ir (ac) (262 pav.). Tie kampai vadinami trisienio kampo *sienomis*, o jų kraštinės — trisienio kampo *briaunomis*. Plokščiųjų kampų bendra viršūnė vadinama trisienio kampo *viršūne*. Dvisieniai kampai, kuriuos nusako trisienio kampo sienos, vadinami *trisienio kampo dvisieniais kampais*.



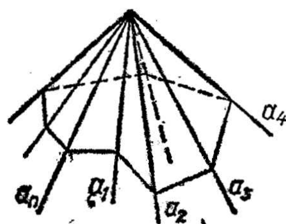
260 pav.



261 pav.

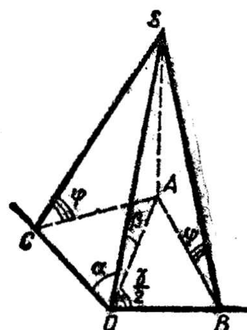


262 pav.



263 pav.

Daugiasienis kampas $(a_1a_2a_3...a_n)$ — figūra, sudaryta iš plokščiųjų kampų (a_1a_2), (a_2a_3), (a_3a_4), ..., (a_na_1). Daugiasienio kampo sienų, briaunų ir dvisienių kampų sąvokos apibrėžiamos taip pat, kaip ir trisienio kampo atveju (263 pav.).



264 pav.

Uždavinys (3). Trisienio kampo vienas plokščiasis kampas lygus γ $(\gamma<\pi)$, o prie jo esantys dvisieniai kampai lygūs $\varphi\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Raskite kitus du plokščiuosius kampus α ir kampą β, kurį kampo γ plokštuma sudaro su priešinga briauna.

Sprendimas. Iš briaunos, esančios prieš kampą γ, bet kurio taško S išveskime statmenį SA kampo γ plokštumai ir statmenis SB, SC to kampo kraštinėms (264 pav.). Remiantis trijų statmenų teorema, atkarpos AB ir AC statmenos kampo γ kraštinėms. Statieji trikampiai SCA ir SBA lygūs, nes turi po lygų statinį ir prieš jį esantį kampą, todėl $AB=AC$. Statieji trikampiai AOB ir AOC lygūs, nes turi po lygų statinį ir įžambinę, todėl $\angle AOC=\angle AOB=\frac{\gamma}{2}$. Tada

$$SC=\frac{AS}{\sin\varphi},\quad AC=\frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi},\quad OA=\frac{AC}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi\sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$OC=\frac{AC}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

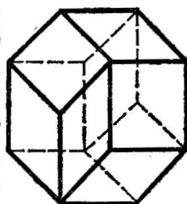
Iš čia

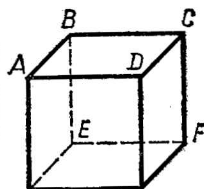
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{SC}{OC}=\frac{\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi},\quad \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

BRIAUNAINIS

Briaunainiu vadinamas kūnas, kurį riboja baigtinis skaičius plokštumų. Tai reiškia, kad visas jo paviršius yra baigtiniame skaičiuje plokštumų. *Iškiluoju briaunainiu* vadinamas briaunainis, kuris yra vienoje pusėje nuo kiekvienos jį ribojančios plokštumos (265 pav.). Iškilojo briaunainio paviršiaus ir jį ribojančios plokštumos bendroji dalis vadinama *briaunainio siena.* Iškilojo briaunainio sienos yra iškilieji daugiakampiai. Briaunainio sienų kraštinės vadinamos *briaunainio briaunomis,* o viršūnės — *briaunainio viršūnėmis.*

Pateiktąjį apibrėžimą paaiškinsime kubo pavyzdžiu. Kubas (266 pav.) yra iškilasis briaunainis. Jo paviršių sudaro šeši kvadratai: $ABCD$, $BEFC$, ... Jie yra kubo sienos. Tų kvadratų kraštinės AB, BC, BE, ... yra kubo briaunos. Kvadratų viršūnės A, B, C, D, E, ... yra kubo viršūnės. Kubas turi šešias sienas, dvylika briaunų ir aštuonias viršūnes.


265 pav.



266 pav.

PRIZMĖ

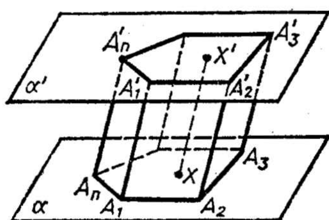
Prizme vadinamas briaunainis, kurį sudaro atkarpos visų lygiagrečių tiesių, kertančių vienoje iš dviejų lygiagrečių plokštumų esantį plokščiąjį daugiakampį. Tose plokštumose esančios prizmės sienos vadinamos *prizmės pagrindais*. Kitos sienos vadinamos *šoninėmis sienomis*. Visos šoninės sienos — lygiagretainiai. Prizmės briaunos, jungiančios pagrindų viršūnes, vadinamos *šoninėmis briaunomis*. Prizmės visos šoninės briaunos yra lygiagrečios.

267 paveiksle pavaizduota prizmė. Ją sudaro lygiagrečių tiesių, kertančių plokštumos α daugiakampį P: $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, atkarpos XX'. Prizmės pagrindai yra daugiakampis P ir jam lygus plokštumos α' daugiakampis P'. Prizmės šoninės sienos yra lygiagretainiai $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ... Prizmės šoninės briaunos yra atkarpos $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, ...

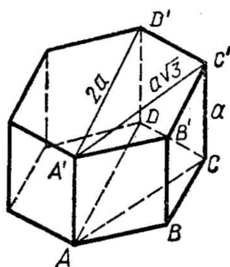
Prizmės aukštine vadinamas atstumas tarp prizmės pagrindų plokštumų. Atkarpa, jungianti dvi prizmės viršūnes, esančias ne vienoje sienoje, vadinama *prizmės įstrižaine*. Prizmės *įstrižiniu pjūviu* vadinamas pjūvis, gautas, prizmę perkirtus plokštuma, einančia per dvi šonines briaunas, esančias ne vienoje sienoje. *Stačiąja prizme* vadinama prizmė, kurios šoninės briaunos statmenos pagrindams. Kitais atvejais prizmė vadinama *pasvirąja*. *Taisyklingąja* prizme vadinama tokia stačioji prizmė, kurios pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai.

U ž d a v i n y s (8). Prizmės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė a. Prizmės šoninės sienos — kvadratai. Raskite prizmės įstrižainės ir jos įstrižinių pjūvių plotus.

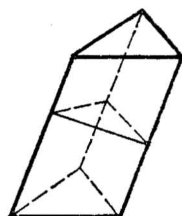
S p r e n d i m a s. Prizmės įstrižiniai pjūviai yra stačiakampiai (268 pav.), kurių pagrindai yra prizmės pagrindo įstrižainės, o aukštinė — prizmės aukštinė. Prizmės pagrindo įstrižainės tokios: didesnioji — $2a$, mažesnioji — $a\sqrt{3}$. Kadangi prizmės aukštinė lygi pagrindo kraštinei a, tai įstrižinių pjūvių plotai lygūs $2a^2$ ir $a^2\sqrt{3}$. Prizmės įstrižainės yra prizmės įstrižinių



267 pav.



268 pav.



269 pav.

pjūvių įstrižainės. Remiantis Pitagoro teorema, prizmės įstrižainės lygios

$$\sqrt{(2a)^2+a^2}=a\sqrt{5},\ \sqrt{(a\sqrt{3})^2+a^2}=2a.$$

Prizmės šoninio paviršiaus plotu (trumpiau, šoniniu paviršiumi) vadinama jos šoninių sienų plotų suma. Prizmės *visas paviršius* lygus šoninio paviršiaus ir pagrindų plotų sumai.

18.1 teorema. ***Stačiosios prizmės šoninis paviršius lygus prizmės pagrindo perimetro ir aukštinės (t. y. šoninės briaunos ilgio) sandaugai.***

Įrodymas. Stačiosios prizmės šoninės sienos — stačiakampiai. Tų stačiakampių pagrindai yra daugiakampio, kuris yra prizmės pagrindas, kraštinės, o aukštinės lygios šoninių briaunų ilgiui. Iš čia išeina, kad prizmės šoninis paviršius

$$S=a_1l+a_2l+\ldots+a_nl=pl;$$

p — prizmės pagrindo perimetras, l — šoninių briaunų ilgis. Teorema įrodyta.

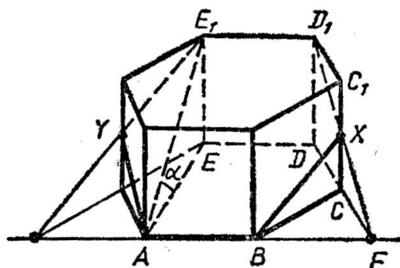
Uždavinys (17). Išvestas pasvirosios prizmės pjūvis, statmenas šoninėms briaunoms ir kertantis visas šonines briaunas. Pjūvio perimetras lygus p, šoninės briaunos lygios l. Raskite prizmės šoninį paviršių.

Sprendimas. Pjūvio plokštuma prizmę dalija į dvi dalis (269 pav.). Vieną jų lygiagrečiuoju postūmiu perkelkime taip, kad prizmės pagrindai sutaptų. Gausime stačiąją prizmę, kurios pagrindas bus pradinės prizmės pjūvis, o šoninės briaunos lygios l. Tos prizmės šoninis paviršius toks pat, kaip ir pradinės prizmės. Taigi pradinės prizmės šoninis paviršius lygus pl.

PLOKŠČIŲJŲ PJŪVIŲ BRAIŽYMAS

Stereometrijoje dažnai tenka nagrinėti kūnų (skyrium imant, briaunainių) pjūvius, gautus, perkirtus tuos kūnus įvairiomis plokštumomis. Pavyzdžiui, su paprasčiausiais pjūvių atvejais su-

sidūrėme, spręsdami 8 ir 17 uždavinius. Dažniausiai uždavinys yra toks: reikia nubraižyti pjūvį, turint kūno lygiagrečiąją projekciją. Pateiksime samprotavimus, kurie būdingi, braižant briaunainių pjūvius.



270 pav.

Pirmiausia pabrėžiame, kad iškilojo briaunainio pjūvis yra iškilasis plokščias daugiakampis, kurio viršūnės bendruoju atveju yra kertančiosios plokštumos susikirtimo su briaunainio briaunomis taškai, o kraštinės — kertančiosios plokštumos ir briaunainio sienų susikirtimo tiesės.

Norint nubrėžti plokštumų susikirtimo tiesę, dažniausiai randami du tos tiesės taškai ir per juos brėžiama tiesė. Norint nubrėžti tiesės ir plokštumos susikirtimo tašką, plokštumoje pasirenkama nagrinėjamąją tiesę kertanti tiesė. Tada ieškomasis taškas yra pasirinktos tiesės ir nagrinėjamos tiesės susikirtimo taškas.

Išnagrinėsime pavyzdį, iš kurio matysime, kaip samprotaujama konkrečiu atveju.

U ž d a v i n y s (9). Taisyklingosios šešiakampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a, šoninės sienos — kvadratai. Nubraižykite pjūvį, gautą, prizmę perkirtus plokštuma, einančia per apatinio pagrindo kraštinę ir prieš ją esančią viršutinio pagrindo kraštinę. Raskite pjūvio plotą.

S p r e n d i m a s. Pjūvio plokštuma eina per lygiagrečias tieses AB ir E_1D_1 (270 pav.). Briaunos AB ir E_1D_1 yra pjūvio (daugiakampio) kraštinės. Rasime to daugiakampio kraštinę D_1X, esančią sienoje CC_1D_1D. Žinome vieną tiesės D_1X tašką — tašką D_1. Kitas tos tiesės taškas yra tiesių AB ir CD susikirtimo taškas F. Iš tikrųjų, jis yra sienos CC_1D_1D plokštumoje ir pjūvio plokštumoje, vadinasi, ir jų susikirtimo tiesėje D_1X. Taškus D_1 ir F sujungę tiese, rasime tašką X. Atkarpa D_1X yra pjūvio kraštinė, esanti sienoje CC_1D_1D. Panašiai randamas taškas Y. Ieškomasis pjūvis yra daugiakampis $ABXD_1E_1Y$.

Rasime pjūvio plotą. Prizmės pagrindas (šešiakampis) yra pjūvio (šešiakampio) statmenoji projekcija, todėl pjūvio plotas $S=\frac{S_0}{\cos\alpha}$; čia S_0 — prizmės pagrindo plotas, α — kampas, kurį kertančioji plokštuma sudaro su pagrindo plokštuma.

Kadangi $EA\perp AB$, tai $E_1A\perp AB$ (trijų statmenų teorema), todėl $\alpha=\angle EAE_1$. Kadangi $EE_1=a$, $AE=a\sqrt{3}$ (taisyklingojo trikampio, įbrėžto į apskritimą, kurio spindulys a, kraštinė), tai

$AE_1=\sqrt{a^2+(a\sqrt{3})^2}=2a$, todėl $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Prizmės pagrindo plotas $S_0=6\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 60°=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Taigi pjūvio plotas

$$S=\frac{S_0}{\cos\alpha}=3a^2.$$

GRETASIENIS

Prizmė, kurios pagrindas yra lygiagretainis, vadinama *gretasieniu.* Gretasienio visos sienos — lygiagretainiai. 271, *a*, paveiksle pavaizduotas pasvirasis gretasienis, o 271, *b*, paveiksle — statusis gretasienis.

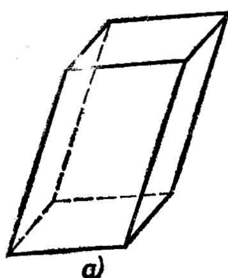
Gretasienio sienos, kurios neturi bendrų viršūnių, vadinamos *priešingomis* sienomis.

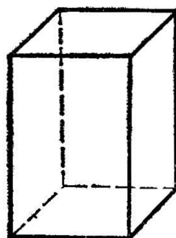
18.2 teorema. ***Gretasienio priešingos sienos lygiagrečios ir lygios.***

Įrodymas. Išnagrinėkime dvi priešingas gretasienio sienas, pavyzdžiui, $A_1A_2A_2'A_1'$ ir $A_3A_4A_4'A_3'$ (272 pav.). Kadangi gretasienio visos sienos — lygiagretainiai, tai tiesė A_1A_2 lygiagreti tiesei A_3A_4, o tiesė A_1A_1' lygiagreti tiesei A_4A_4'. Iš čia išplaukia, kad nagrinėjamų sienų plokštumos yra lygiagrečios. Iš to, kad gretasienio sienos — lygiagretainiai, išeina, kad visos atkarpos A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ ir A_2A_3 — lygiagrečios ir lygios. Iš čia darome išvadą, kad lygiagrečiuoju postūmiu palei briauną A_1A_4 siena $A_1A_2A_2'A_1'$ sutapdinama su siena $A_3A_4A_4'A_3'$. Vadinasi, tos sienos lygios. Panašiai įrodomas bet kurių kitų dviejų priešingų gretasienio sienų lygiagretumas ir lygumas. Teorema įrodyta.

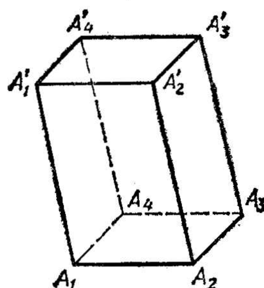
Uždavinys (21). Gretasienio trijų sienų plotai lygūs 1 m², 2 m², 3 m². Apskaičiuokite gretasienio visą paviršių.

Sprendimas. Kadangi gretasienio priešingos sienos lygios, tai jų plotai lygūs. Vadinasi, nagrinėjamo gretasienio dvi sienos yra po 1 m² ploto, dvi — po 2 m² ir dvi — po 3 m². Kadangi gretasienis turi šešias sienas, jo visas paviršius lygus $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3=12$ (m²).





271 pav.



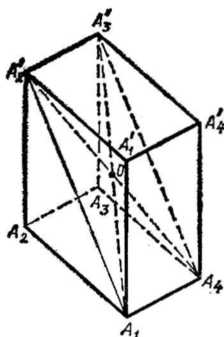
272 pav.

18.3 t e o r e m a. ***Gretasienio įstrižainės susikerta viename taške, kuris kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.***

Į r o d y m a s. Išnagrinėkime kokias nors dvi gretasienio įstrižaines, pavyzdžiui, A_1A_3' ir A_4A_2' (273 pav.).

Kadangi keturkampiai $A_1A_2A_3A_4$ ir $A_2A_2'A_3'A_3$ — lygiagretainiai, kurių kraštinė A_2A_3 bendra, tai jų kraštinės A_1A_4 ir $A_2'A_3'$ yra lygiagrečios, taigi jos yra vienoje plokštumoje. Tos plokštumos ir gretasienio priešingų sienų susikirtimo tiesės A_1A_2' ir A_4A_2' yra lygiagrečios. Vadinasi, keturkampis $A_4A_1A_2'A_3'$ — lygiagretainis. Gretasienio įstrižainės A_1A_3' ir A_4A_2' yra to lygiagretainio įstrižainės, todėl jos susikerta ir susikirtimo taškas O kiekvieną jų dalija pusiau. Panašiai įrodoma, kad įstrižainės A_1A_3' ir A_2A_4' bei A_1A_3' ir A_3A_1' susikerta ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau. Iš čia darome išvadą, kad gretasienio visos keturios įstrižainės susikerta viename taške, kuris kiekvieną įstrižainę dalija pusiau. Teorema įrodyta.

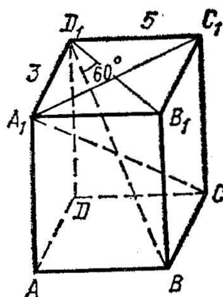
Iš 18.3 teoremos išeina, kad ***gretasienio įstrižainių susikirtimo taškas yra jo simetrijos centras.***



273 pav.

U ž d a v i n y s (24). Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės 3 cm ir 5 cm, o viena pagrindo įstrižainė 4 cm. Mažesnioji gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą (274 pav.). Apskaičiuokite gretasienio didesniąją įstrižainę.

S p r e n d i m a s. Randame antrą pagrindo įstrižainę. Kadangi pagrindas — lygiagretainis, o lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi kraštinių kvadratų sumai, tai antra pagrindo įstrižainė lygi $\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 5^2-4^2}=\sqrt{52}>4$. Šoninė briauna lygi $4\,\mathrm{tg}\,60°=4\sqrt{3}$. Gretasienio didesnioji įstrižainė lygi $\sqrt{(\sqrt{52})^2+(4\sqrt{3})^2}=$ $=10$ (cm).

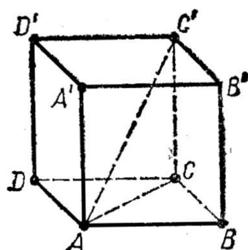


274 pav.

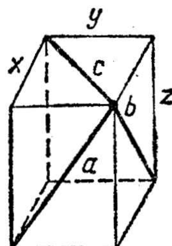
Statusis gretasienis, kurio pagrindas yra stačiakampis, vadinamas *stačiakampiu gretasieniu.* Stačiakampio gretasienio visos sienos — stačiakampiai.

Stačiakampis gretasienis, kurio visos briaunos lygios, vadinamas *kubu.*

Stačiakampio gretasienio nelygiagrečių briaunų ilgiai vadinami jo *matmenimis.* Stačiakampis gretasienis turi tris matmenis.



275 pav.



276 pav.

18.4 teorema. ***Stačiakampio gretasienio kiekvienos įstrižainės kvadratas lygus jo matmenų kvadratų sumai.***

Įrodymas. Išnagrinėkime stačiakampį gretasienį $ABCDA'B'C'D'$ (275 pav.). Iš stačiojo trikampio $AC'C$, remdamiesi Pitagoro teorema, rašome:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Iš stačiojo trikampio ACB, remdamiesi Pitagoro teorema, gauname:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Taigi

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

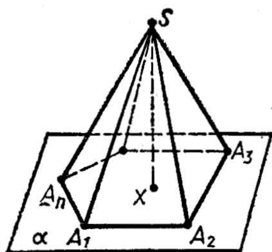
Briaunos AB, BC ir CC' nelygiagrečios, vadinasi, jų ilgiai yra stačiakampio gretasienio matmenys. Teorema įrodyta.

Uždavinys (33). Stačiakampio gretasienio trijų sienų įstrižainės, išeinančios iš vienos viršūnės, lygios a, b, c. Raskite gretasienio matmenis.

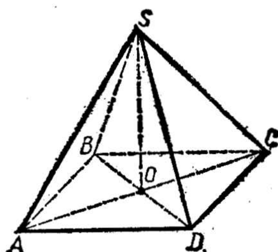
Sprendimas. Gretasienio matmenis pažymėkime raidėmis x, y, z (276 pav.). Tada: $x^2+y^2=c^2$, $y^2+z^2=a^2$, $z^2+x^2=b^2$. Panariui sudėję pirmąsias dvi lygtis ir atėmę trečiąją, gauname: $2y^2=c^2+a^2-b^2$. Iš čia $y=\sqrt{\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)}$. Panašiai rastume: $x=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}$, $z=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}$.

PIRAMIDĖ

Piramide vadinamas briaunainis, kurį sudaro visos atkarpos, jungiančios vieną tašką — *piramidės viršūnę* — su plokščiojo daugiakampio — *piramidės pagrindo* — taškais. Piramidės paviršių sudaro pagrindas ir šoninės sienos. Kiekviena šoninė siena — trikampis. Viena jo viršūnė yra piramidės viršūnė, o prieš ją esanti kraštinė — piramidės pagrindo kraštinė. Piramidės *šoninėmis*



277 pav.



278 pav.

briaunomis vadinamos briaunos, jungiančios viršūnę su pagrindo viršūnėmis. *Piramidės aukštine* vadinamas statmuo, išvestas iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą.

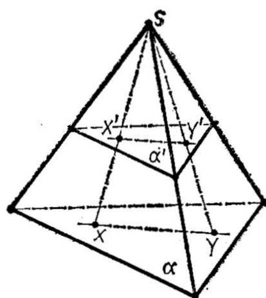
277 paveiksle pavaizduota piramidė. Jos pagrindas yra daugiakampis $A_1A_2\ldots A_n$, piramidės viršūnė — S, šoninės briaunos — SA_1, SA_2, ..., SA_n, piramidės aukštinė — SX. Piramidė, kurios pagrindas yra n-kampis, vadinama *n*-kampe piramide. Trikampė piramidė dar vadinama *tetraedru*.

Uždavinys (35). Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės 6 cm ir 8 cm. Kiekviena piramidės šoninė briauna lygi 13 cm. Apskaičiuokite piramidės aukštinę.

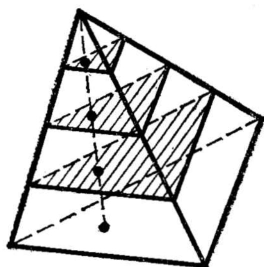
Sprendimas. Kadangi visos šoninės briaunos lygios, tai pagrindo viršūnės vienodai nutolusios nuo piramidės aukštinės pagrindo (278 pav.), t. y. $AO=BO=CO=DO$. Vadinasi, piramidės aukštinės pagrindas yra apie pagrindą apibrėžto apskritimo centras, t. y. stačiakampio įstrižainių susikirtimo taškas. Todėl piramidės aukštinė yra stačiojo trikampio, kurio vienas statinis — pusė pagrindo įstrižainės, o įžambinė — šoninė briauna, kitas statinis. Pagrindo įstrižainė $AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (cm), todėl piramidės aukštinė $SO=\sqrt{13^2-5^2}=12$ cm.

18.5 teorema. ***Piramidės pagrindui lygiagreti plokštuma, kertanti piramidę, nuo jos nukerta panašią į ją piramidę.***

Įrodymas. Sakykime, S — piramidės viršūnė, α — jos pagrindo plokštuma ir α' — kertančioji plokštuma (279 pav.). Piramidės pagrinde pasirinkime bet kokius du taškus X ir Y. Plokštuma α' atkarpas XS ir YS kirs taškuose X' ir Y'. Tiesės XY ir $X'Y'$ lygiagrečios, nes yra vienoje — trikampio XYS — plokštumoje ir nesusikerta. Kadangi trikampiai SXY ir $SX'Y'$ panašūs, tai santykiai $\frac{X'S}{XS}$ ir $\frac{Y'S}{YS}$ lygūs, t. y. santykis $\frac{X'S}{XS}=k$ nepriklauso nuo pasirinktojo taško X. Iš čia išplaukia, kad piramidė, kurią nukerta plokštuma α', gaunama iš nagrinėjamos piramidės homotetija centro S atžvilgiu, o homotetijos koeficientas lygus k. Homotetiškos figūros yra panašios. Teorema įrodyta.



279 pav.

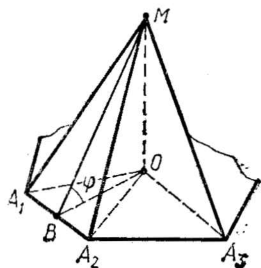

280 pav.

Uždavinys (36). Piramidės aukštinė padalyta į keturias lygias dalis ir per dalijimo taškus išvestos pagrindui lygiagrečios plokštumos. Pagrindo plotas lygus 400 cm^2. Apskaičiuokite pjūvių plotus (280 pav.).

Sprendimas. Pjūviai panašūs į piramidės pagrindą, panašumo koeficientai $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ ir $\frac{3}{4}$. Panašiųjų figūrų plotų santykis lygus jų matmenų santykio kvadratui, todėl pjūvių plotų ir piramidės pagrindo ploto santykiai yra $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ ir $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Vadinasi, pjūvių plotai lygūs: $400\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=25$ cm^2, $400\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2=$ $=100$ cm^2, $400\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=225$ cm^2.

Taisyklingąja piramide vadinama piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o aukštinės pagrindas sutampa su to daugiakampio centru. Taisyklingosios piramidės *ašimi* vadinama tiesė, einanti per piramidės aukštinę. Savaime aišku, kad taisyklingosios piramidės šoninės briaunos lygios. Vadinasi, šoninės sienos — lygūs lygiašoniai trikampiai. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė, išvesta iš piramidės viršūnės, vadinama *apotema*. Piramidės *šoniniu paviršiumi* vadinama jos šoninių sienų plotų suma.

18.6 teorema. ***Taisyklingosios piramidės šoninis paviršius lygus jos pagrindo pusperimetrio ir apotemos sandaugai.***



281 pav.

Įrodymas. Jei pagrindo kraštinė a, o kraštinių skaičius n, tai piramidės šoninis paviršius $\frac{al}{2}n=\frac{anl}{2}=\frac{pl}{2}$; čia l — apotema, o p — pagrindo perimetras. Teorema įrodyta.

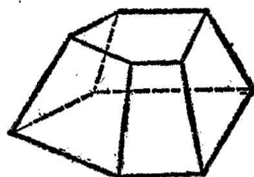
Uždavinys (51). Piramidės pagrindo plotas Q, o dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs φ. Raskite piramidės šoninį paviršių.

Sprendimas. Sakykime, piramidės pagrindas yra daugiakampis $A_1A_2...A_n$ (281 pav.). Išveskime piramidės aukštinę MO. Remiantis 17.1 teorema,

$$S_{\triangle A_1A_2M}=\frac{S_{\triangle A_1A_2O}}{\cos\varphi}.$$

Panašiai gauname:

$$S_{\triangle A_2A_3M}=\frac{S_{\triangle A_2A_3O}}{\cos\varphi},\quad S_{\triangle A_3A_4M}=\frac{S_{\triangle A_3A_4O}}{\cos\varphi}$$



282 pav.

ir t. t. Sudėję tas lygybes panariui, kairiojoje pusėje gausime piramidės šoninį paviršių, o dešiniojoje — pagrindo plotą Q, padalytą iš $\cos\varphi$. Taigi piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus $\frac{Q}{\cos\varphi}$.

Remiantis 18.5 teorema, piramidės pagrindo plokštumai α lygiagreti plokštuma α', kertanti piramidę, nuo piramidės nukerta panašią į ją piramidę. Likusioji piramidės dalis irgi yra briaunainis. Jis vadinamas *nupjautine piramide* (282 pav.). Nupjautinės piramidės sienos, esančios lygiagrečiose plokštumose α ir α', vadinamos *piramidės pagrindais*; kitos sienos — *šoninėmis sienomis*. Nupjautinės piramidės pagrindai yra panašūs (tiksliau, homotetiški) daugiakampiai, šoninės sienos — trapecijos. Nupjautinė piramidė, kuri gaunama iš taisyklingosios piramidės, irgi vadinama taisyklingąja. Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninės sienos — lygios lygiašonės trapecijos; jų aukštinės vadinamos *apotemomis*.

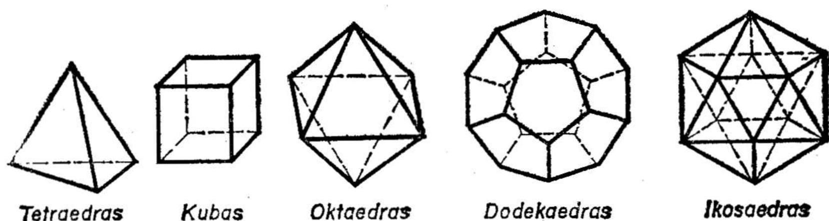
Uždavinys (58). Įrodykite, kad taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninis paviršius lygus pagrindų perimetrų sumos pusės ir apotemos sandaugai.

Sprendimas. Nupjautinės piramidės šoninės sienos — trapecijos, kurių tas pats viršutinis pagrindas a, tas pats apatinis pagrindas b ir ta pati aukštinė (apotema) l. Vienos sienos plotas lygus $\frac{1}{2}(a+b)l$. Visų sienų plotas, t. y. šoninis paviršius lygus $\frac{1}{2}(an+bn)l$; čia an ir bn — pagrindų perimetrai.

TAISYKLINGIEJI BRIAUNAINIAI

Taisyklinguoju briaunainiu vadinamas iškilasis briaunainis, kurio sienos yra taisyklingieji daugiakampiai, turintys po tiek pat kraštinių, ir iš kiekvienos viršūnės išeina po tiek pat briaunų.

Yra penkių tipų iškilieji taisyklingieji briaunainiai (283 pav.): *taisyklingasis tetraedras, kubas, oktaedras, dodekaedras, ikosaedras.*



283 pav.

Taisyklingojo tetraedro sienos — taisyklingieji trikampiai; iš kiekvienos viršūnės išeina trys briaunos. Tetraedras yra trikampė piramidė, kurios visos briaunos lygios.

Kubo visos sienos — kvadratai; iš kiekvienos viršūnės išeina trys briaunos. Kubas yra stačiakampis gretasienis, kurio visos briaunos lygios.

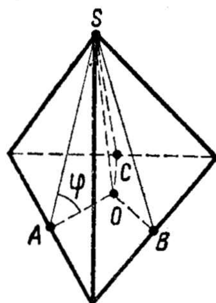
Oktaedro sienos — taisyklingieji trikampiai; iš kiekvienos oktaedro viršūnės išeina keturios briaunos (tuo jis skiriasi nuo tetraedro).

Dodekaedro sienos — taisyklingieji penkiakampiai; iš kiekvienos viršūnės išeina trys briaunos.

Ikosaedro sienos — taisyklingieji trikampiai; iš kiekvienos viršūnės išeina penkios briaunos (tuo jis skiriasi nuo tetraedro ir oktaedro).

Uždavinys (70). Raskite taisyklingojo tetraedro dvisienius kampus.

Sprendimas. Iš tetraedro viršūnės S išveskime per ją einančių sienų aukštines SA, SB, SC ir tetraedro aukštinę SO (284 pav.). Jei tetraedro briauną pažymėsime raide a, tai sienų aukštinės bus lygios $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Kadangi aukštinės SA, SB, SC lygios, tai atkarpos OA, OB, OC irgi lygios. Jos statmenos trikampio — tetraedro pagrindo — kraštinėms (trijų statmenų teorema).



284 pav.

Iš čia išeina, kad taškas O yra į tetraedro pagrindą įbrėžto apskritimo centras. Vadinasi, atkarpos OA, OB, OC lygios $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Dvisienį kampą prie briaunos, einančios per tašką A, pažymėkime φ. Tada

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\varphi \approx 70°32'.$$

Akivaizdu, kad tokie pat yra ir dvisieniai kampai prie kitų tetraedro briaunų.

1. Ką vadiname dvisieniu kampu (kampo siena, kampo briauna)?
2. Ką vadiname dvisienio kampo tiesiniu kampu?
3. Kodėl dvisienio kampo matas nepriklauso nuo tiesinio kampo parinkimo?
4. Paaiškinkite, kas yra trisienis kampas (trisienio kampo sienos ir briaunos).
5. Paaiškinkite, kas yra trisienio kampo plokštieji ir dvisieniai kampai.
6. Kas yra daugiasienis kampas?
7. Kas yra briaunainis (briaunainio paviršius)?
8. Koks briaunainis vadinamas iškiluoju?
9. Kas yra iškilojo briaunainio siena, briauna, viršūnė?
10. Kas yra prizmė (prizmės pagrindai, šoninės sienos, briaunos)?
11. Kas yra prizmės aukštinė?
12. Kas yra prizmės įstrižainė? Kas yra prizmės įstrižinis pjūvis?
13. Kokia prizmė vadinama stačiąja (pasvirąja)?
14. Kokia prizmė vadinama taisyklingąja?
15. Kas yra prizmės šoninis paviršius (prizmės visas paviršius)?
16. Įrodykite, kad stačiosios prizmės šoninis paviršius lygus prizmės pagrindo perimetro ir aukštinės sandaugai.
17. Kuo remiamasi, braižant briaunainių plokščiuosius pjūvius?
18. Kas yra gretasienis?
19. Įrodykite, kad gretasienio priešingos sienos lygiagrečios ir lygios.
20. Įrodykite, kad gretasienio įstrižainės susikerta viename taške, kuris kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.
21. Įrodykite, kad gretasienio įstrižainių susikirtimo taškas yra gretasienio simetrijos centras.
22. Koks gretasienis vadinamas stačiakampiu? Kas yra stačiakampio gretasienio matmenys?
23. Kas yra kubas?
24. Įrodykite, kad stačiakampio gretasienio kiekvienos įstrižainės kvadratas lygus jo matmenų kvadratų sumai.
25. Kas yra piramidė (piramidės pagrindas, šoninės sienos, briaunos, aukštinė)?
26. Įrodykite, kad piramidės pagrindui lygiagreti plokštuma nuo piramidės nukerta panašią į ją piramidę.
27. Kokia piramidė vadinama taisyklingąja? Kas yra taisyklingosios piramidės ašis?
28. Kas yra taisyklingosios piramidės apotema? Įrodykite, kad taisyklingosios piramidės šoninis paviršius lygus jos pagrindo pusperimetrio ir apotemos sandaugai.

29. Paaiškinkite, kas yra nupjautinė piramidė. Įrodykite, kad taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninis paviršius lygus pagrindų perimetrų sumos pusės ir apotemos sandaugai.
30. Koks briaunainis vadinamas taisyklinguoju?
31. Išvardykite penkis taisyklingųjų briaunainių tipus ir juos apibūdinkite.

PRATIMAI

1. Iš taškų A ir B, esančių dvisienio kampo sienose, išvesti į jo briauną statmenys AA_1 ir BB_1; $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$, dvisienis kampas lygus α. Raskite atkarpos AB ilgį.
2. Raskite dvisienį kampą α, kai $AA_1=3$, $BB_1=4$, $A_1B_1=6$, $AB=7$ (žr. 1 uždavinį).
3. Trisienio kampo vienas plokščiasis kampas lygus γ $(\gamma<\pi)$, o prie jo esantys dvisieniai kampai lygūs φ $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Raskite kitus du plokščiuosius kampus α ir kampą β, kurį kampo γ plokštuma sudaro su priešinga briauna.
4. Trisienio kampo du plokštieji kampai smailūs ir lygūs α, o trečias kampas lygus γ. Raskite prieš plokščiuosius kampus α esančius dvisienius kampus φ; kampą β tarp kampo γ plokštumos ir priešingos briaunos.
5. Stačiosios trikampės prizmės pagrindo kraštinės lygios 10 cm, 17 cm ir 21 cm, o prizmės aukštinė lygi 18 cm. Per šoninę briauną ir trumpiausią pagrindo aukštinę išvestas pjūvis. Apskaičiuokite pjūvio plotą.
6. Pasvirosios prizmės briauna lygi 15 cm ir pasvirusi į pagrindo plokštumą 30° kampu. Apskaičiuokite prizmės aukštinę.
7. Atstumai tarp pasvirosios trikampės prizmės šoninių briaunų lygūs 37 cm, 13 cm ir 40 cm. Apskaičiuokite atstumą tarp didžiausios šoninės sienos ir priešingos šoninės briaunos.
8. Prizmės pagrindas yra taisyklingasis šešiakampis, kurio kraštinė a. Prizmės šoninės sienos — kvadratai. Raskite prizmės įstrižaines ir jos įstrižinių pjūvių plotus.
9. Taisyklingosios šešiakampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a, šoninės sienos — kvadratai. Nubraižykite pjūvį, gautą, prizmę perkirtus plokštuma, einančia per apatinio pagrindo kraštinę ir prieš ją esančią viršutinio pagrindo kraštinę. Raskite pjūvio plotą.
10. Per taisyklingosios trikampės prizmės apatinio pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kurios susikirtimo su šoninėmis sienomis tiesės sudaro kampą α. Raskite tos plokštumos posvyrio į prizmės pagrindą kampą.
11. Per taisyklingosios keturkampės prizmės dviejų gretimų pagrindo kraštinių vidurio taškus išvesta plokštuma, kertanti

tris šonines briaunas ir pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Pagrindo kraštinė lygi a. Raskite pjūvio plotą.

12. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo plotas 144 cm², o aukštinė 14 cm. Apskaičiuokite prizmės įstrižainę.

13. Taisyklingosios keturkampės prizmės šoninės sienos plotas lygus Q. Raskite įstrižinio pjūvio plotą.

14. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo kraštinė lygi 15, aukštinė lygi 20. Raskite trumpiausią atstumą nuo pagrindo kraštinės iki jos nekertančios prizmės įstrižainės.

15. Stačiosios trikampės prizmės visos briaunos lygios. Šoninis paviršius lygus 12 m². Apskaičiuokite aukštinę.

16. Taisyklingosios keturkampės prizmės šoninis paviršius lygus 32 m², o visas paviršius 40 m². Apskaičiuokite aukštinę.

17. Išvestas pasvirosios prizmės pjūvis, statmenas šoninėms briaunoms ir kertantis visas šonines briaunas. Pjūvio perimetras lygus p, šoninės briaunos lygios l. Raskite prizmės šoninį paviršių.

18. Atstumai tarp lygiagrečių tiesių, einančių per pasvirosios trikampės prizmės šonines briaunas, lygūs 2 cm, 3 cm ir 4 cm, šoninės briaunos 5 cm. Apskaičiuokite prizmės šoninį paviršių.

19. Taisyklingosios prizmės pagrindo kraštinė a, šoninė briauna b. Raskite prizmės visą paviršių, kai prizmė: 1) trikampė; 2) keturkampė; 3) šešiakampė.

20. Plokštuma, einanti per taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinę ir prieš ją esančios briaunos vidurį, su pagrindu sudaro 45° kampą. Pagrindo kraštinė l. Raskite prizmės šoninį paviršių.

21. Gretasienio trijų sienų plotai yra 1 m², 2 m² ir 3 m². Apskaičiuokite gretasienio visą paviršių.

22. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės 6 m ir 8 m, kampas tarp jų 30°; šoninė briauna lygi 5 m. Apskaičiuokite gretasienio visą paviršių.

23. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės 3 cm ir 8 cm, kampas tarp jų 60°. Gretasienio šoninis paviršius lygus 220 cm². Raskite gretasienio visą paviršių.

24. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės 3 cm ir 5 cm, o viena pagrindo įstrižainė 4 cm. Mažesnioji gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite gretasienio didesniąją įstrižainę.

25. Stačiojo gretasienio kiekviena briauna lygi a, o pagrindo kampas lygus 60°. Raskite gretasienio įstrižaines.

26. Stačiojo gretasienio šoninė briauna lygi 5 m, pagrindo kraštinės lygios 6 m ir 8 m, o viena pagrindo įstrižainė lygi 12 m. Apskaičiuokite gretasienio įstrižaines.

27. Stačiojo gretasienio šoninė briauna lygi 1 m, pagrindo kraštinės lygios 23 dm ir 11 dm, o pagrindo įstrižainių santykis 2 : 3. Raskite įstrižinių pjūvių plotus.

28. Raskite stačiakampio gretasienio įstrižaines, kai žinomi jo matmenys: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

29. Kubo briauna lygi *a*. Raskite atstumą nuo kubo viršūnės iki jo įstrižainės, jungiančios kitas dvi viršūnes.

30. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinės 7 dm ir 24 dm, o gretasienio aukštinė 8 dm. Apskaičiuokite įstrižinio pjūvio plotą.

31. Stačiakampio gretasienio matmenys 10 cm, 22 cm, 16 cm. Raskite gretasienio paviršių.

32. Stačiakampio gretasienio aukštinė *h*, pagrindo plotas *Q*, o įstrižinio pjūvio plotas *M*. Raskite gretasienio šoninį paviršių.

33. Stačiakampio gretasienio trijų sienų įstrižainės, išeinančios iš vienos viršūnės, lygios *a*, *b*, *c*. Raskite gretasienio matmenis.

34. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio pagrindas lygus 12 cm, o šoninė kraštinė 10 cm. Šoninės sienos su pagrindu sudaro lygius dvisienius kampus, kurių kiekvienas lygus 45°. Raskite piramidės aukštinę.

35. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės 6 cm ir 8 cm. Kiekviena piramidės šoninė briauna lygi 13 cm. Apskaičiuokite piramidės aukštinę.

36. Piramidės aukštinė padalyta į keturias lygias dalis ir per dalijimo taškus išvestos pagrindui lygiagrečios plokštumos. Pagrindo plotas lygus 400 cm^2. Raskite pjūvių plotus.

37. Piramidės aukštinė lygi 16 m, pagrindo plotas lygus 512 m^2. Kokiu atstumu nuo pagrindo nutolęs jam lygiagretus pjūvis, kurio plotas 50 m^2?

38. Piramidės pagrindas yra taisyklingasis trikampis; viena šoninė siena statmena pagrindui, o kitos dvi pasvirusios į ją kampu α. Kokiu kampu šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą?

39. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio įžambinė *a*. Kiekviena šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite piramidės aukštinę.

40. Piramidės pagrindas — statusis trikampis, kurio statiniai 6 cm ir 8 cm. Visi dvisieniai kampai prie piramidės pagrindo lygūs 60°. Apskaičiuokite piramidės aukštinę.

41. Per taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, kertanti prieš tą kraštinę esančią šoninę briauną stačiu kampu. Piramidės pagrindo kraštinė lygi *a*, piramidės aukštinė *h*. Raskite pjūvio plotą.

42. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi 7 cm, o pagrindo kraštinė 8 cm. Apskaičiuokite šoninę briauną.

43. Piramidės pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinės 3 cm ir 7 cm, o viena įstrižainė 6 cm; piramidės aukštinė eina per įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 4 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninę briauną.

44. Taisyklingosios keturkampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite dvisienį kampą x prie piramidės pagrindo.

45. Taisyklingosios piramidės pagrindo kraštinė a, šoninė briauna b. Raskite piramidės aukštinę, kai piramidė: 1) trikampė; 2) keturkampė; 3) šešiakampė.

46. Taisyklingosios piramidės pagrindo kraštinė a, aukštinė b. Raskite piramidės apotemą, kai piramidė: 1) trikampė; 2) keturkampė; 3) šešiakampė.

47. Taisyklingosios piramidės pagrindo kraštinė a, aukštinė h. Raskite piramidės visą paviršių, kai piramidė: 1) trikampė; 2) keturkampė; 3) šešiakampė.

48. Taisyklingosios šešiakampės piramidės šoninė briauna a, o į pagrindą įbrėžto apskritimo spindulys r. Raskite piramidės visą paviršių.

49. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninis paviršius lygus 14,76 m², o visas paviršius 18 m². Apskaičiuokite piramidės pagrindo kraštinę ir aukštinę.

50. Taisyklingosios keturkampės piramidės įstrižinis pjūvis lygiaplotis su pagrindu, kurio kraštinė a. Raskite piramidės šoninį paviršių.

51. Piramidės pagrindo plotas Q, o dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs φ. Raskite piramidės šoninį paviršių.

52. Taisyklingosios piramidės pagrindo plotas lygus Q, o šoninis paviršius — S. Raskite dvisienius kampus prie piramidės pagrindo.

53. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi 10 cm, o šoninis paviršius lygus 144 cm². Apskaičiuokite piramidės pagrindo kraštinę ir apotemą.

54. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi 5 cm, o visas paviršius 16 cm². Apskaičiuokite piramidės pagrindo kraštinę.

55. Piramidės pagrindas — rombas, kurio įstrižainės 6 m ir 8 m; piramidės aukštinė eina per įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 1 m. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

56. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio kraštinės 40 cm, 25 cm ir 25 cm. Piramidės aukštinė eina per kampo, esančio prieš 40 cm kraštinę, viršūnę ir lygi 8 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

57. Piramidės pagrindas — kvadratas, jos aukštinė eina per vieną pagrindo viršūnę; piramidės pagrindo kraštinė lygi 20 dm, o aukštinė 21 dm. Apskaičiuokite piramidės šoninį paviršių.

58. Įrodykite, kad taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninis paviršius lygus pagrindų perimetrų sumos pusės ir apotemos sandaugai.

59. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 7 cm, pagrindų kraštinės lygios 10 cm ir 2 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninę briauną.

60. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės 4 dm ir 1 dm, šoninė briauna 2 dm. Apskaičiuokite piramidės aukštinę.

61. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 2 cm, o pagrindų kraštinės lygios 3 cm ir 5 cm. Apskaičiuokite piramidės įstrižainę.

62. Nupjautinės taisyklingosios trikampės piramidės pagrindų kraštinės 2 cm ir 6 cm, o šoninė siena su didesniuoju pagrindu sudaro 60° kampą. Raskite piramidės aukštinę.

63. Taisyklingosios nupjautinės trikampės piramidės didesniojo pagrindo kraštinė a, mažesniojo — b. Šoninė briauna su pagrindu sudaro 45° kampą. Raskite piramidės pjūvio, einančio per piramidės šoninę briauną ir ašį *, plotą.

64. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 4, pagrindų kraštinės lygios 2 ir 8. Raskite įstrižinių pjūvių plotus.

65. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės apatinio pagrindo kraštinė 8 m, viršutinio — 5 m. Per apatinio pagrindo kraštinę ir prieš ją esančią viršutinio pagrindo viršūnę išveskite piramidės pjūvį. Apskaičiuokite pjūvio plotą ir dvisienį kampą tarp pjūvio ir apatinio pagrindo.

66. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės 8 m ir 2 m, aukštinė lygi 4 m. Apskaičiuokite piramidės visą paviršių.

67. Taisyklingosios nupjautinės piramidės aukštinė h, o pagrindų kraštinės a ir b. Raskite piramidės visą paviršių, kai piramidė: 1) trikampė; 2) keturkampė; 3) šešiakampė.

68. Įrodykite, kad kubo sienų centrai yra oktaedro viršūnės, o oktaedro sienų centrai yra kubo viršūnės.

69. Įrodykite, kad kubo priešingų sienų dviejų nelygiagrečių įstrižainių galai yra tetraedro viršūnės.

70. Raskite taisyklingojo tetraedro dvisienius kampus.

71. Raskite oktaedro dvisienius kampus.

§ 19. SUKINIAI (SUKIMOSI KŪNAI)

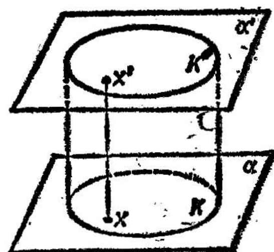
RITINYS

Ritiniu (apskrituoju cilindru) vadinamas kūnas, kurį sudaro tarp dviejų lygiagrečių plokštumų esančios visų lygiagrečių tiesių, kertančių vienoje tų plokštumų esantį skritulį, atkarpos. Tos atkarpos, kurių vienas galas yra to skritulio apskritimo taškas, vadinamos *ritinio sudaromosiomis.*

---

* Taisyklingosios nupjautinės piramidės ašis sutampa su atitinkamos pilnosios piramidės ašimi.

Ritinio paviršių sudaro *ritinio pagrindai* — du lygūs skrituliai, esantys lygiagrečiose plokštumose, ir *šoninis paviršius.*

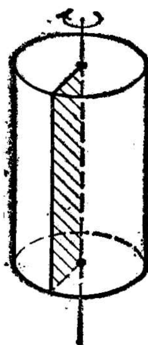


285 pav.

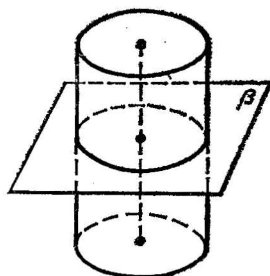
Stačiuoju ritiniu vadinamas ritinys, kurio sudaromosios statmenos pagrindų plokštumoms. Toliau nagrinėsime tik statųjį ritinį, kurį, kad būtų trumpiau, vadinsime tiesiog ritiniu.

285 paveiksle pavaizduotas statusis ritinys. Jį sudaro lygiagrečių tiesių atkarpos XX', esančios tarp lygiagrečių plokštumų α ir α'. Ritinio pagrindai yra tų plokštumų skrituliai K ir K'.

Statųjį ritinį galima nagrinėti kaip kūną, gautą, stačiakampį sukant apie kraštinę, kaip apie ašį (286 pav.).


286 pav.

Ritinio *spinduliu* vadinamas jo pagrindo spindulys. Ritinio *aukštine* vadinamas atstumas tarp pagrindų plokštumų. *Ritinio ašimi* vadinama tiesė, einanti per pagrindų centrus. Ji lygiagreti sudaromosioms. Ritinio pjūvis, gautas, ritinį perkirtus plokštuma, einančia per ritinio ašį, vadinamas *ašiniu pjūviu.* Plokštuma, einanti per ritinio sudaromąją ir statmena per tą sudaromąją išvestam ašiniam pjūviui, vadinama ritinio *liečiamąja plokštuma.*



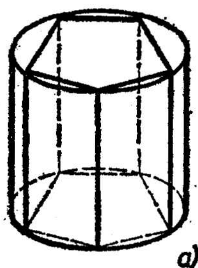
287 pav.

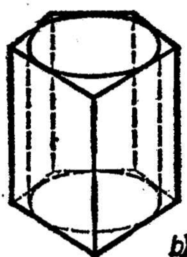
U ž d a v i n y s (2). Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas, kurio plotas Q. Raskite ritinio pagrindo plotą.

S p r e n d i m a s Kvadrato kraštinė lygi $\sqrt{Q}$. Ji lygi pagrindo skersmeniui, todėl pagrindo plotas lygus $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$.

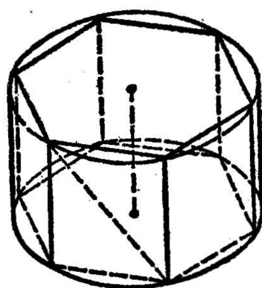
19.1 t e o r e m a. ***Ritinio ašiai statmena plokštuma kerta ritinio šoninį paviršių apskritimu, lygiu pagrindo apskritimui.***

Į r o d y m a s. Sakykime, β — ritinio ašiai statmena plokštuma (287 pav.). Ta plokštuma lygiagreti pagrindams. Lygiagretusis postūmis ritinio ašies kryptimi, kuris plokštumą β sutapdina su ritinio pagrindo plokštuma, ritinio šoninio paviršiaus pjūvį, gautą, ritinį perkirtus plokštuma β, sutapdina su pagrindo apskritimu. Teorema įrodyta.





288 pav.



289 pav.

Į ritinį *įbrėžta* prizme vadinama tokia prizmė, kurios pagrindai — lygūs daugiakampiai, įbrėžti į ritinio pagrindus. Jos šoninės briaunos yra ritinio sudaromosios (288 pav., *a*). Apie ritinį *apibrėžta* prizme vadinama tokia prizmė, kurios pagrindai — lygūs daugiakampiai, apibrėžti apie ritinio pagrindus. Jos sienų plokštumos liečia ritinio šoninį paviršių (288 pav., *b*).

Uždavinys (7). Į ritinį įbrėžta taisyklingoji šešiakampė prizmė. Ritinio pagrindo spindulys lygus ritinio aukštinei. Raskite kampą tarp prizmės šoninės sienos įstrižainės ir ritinio ašies.

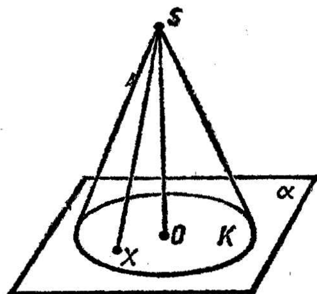
Sprendimas. Prizmės šoninės sienos — kvadratai, nes į apskritimą įbrėžto taisyklingojo šešiakampio kraštinė lygi spinduliui (289 pav.). Prizmės briaunos lygiagrečios ritinio ašiai, todėl kampas tarp šoninės sienos įstrižainės ir ritinio ašies lygus kampui tarp tos įstrižainės ir prizmės šoninės briaunos. Tas kampas lygus 45°, nes sienos — kvadratai.

KŪGIS

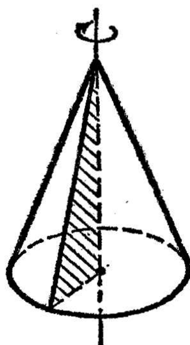
Kūgiu (tiksliau, apskrituoju kūgiu) vadinamas kūnas, kurį sudaro visos atkarpos, jungiančios vieną tašką — *kūgio viršūnę* — su skritulio — *kūgio pagrindo* — taškais. Atkarpos, jungiančios kūgio viršūnę su pagrindo apskritimo taškais, vadinamos *kūgio sudaromosiomis*. Kūgio paviršių sudaro jo pagrindas ir *šoninis paviršius*.

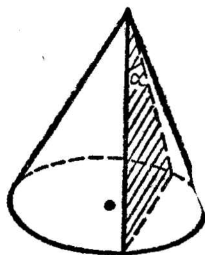
Stačiuoju kūgiu vadinamas kūgis, per kurio viršūnę ir pagrindo centrą einanti tiesė yra statmena pagrindo plokštumai. Nagrinėsime tik statųjį kūgį, kurį, kad būtų trumpiau, vadinsime tiesiog kūgiu.

290 paveiksle pavaizduotas statusis kūgis. Taškas S yra jo viršūnė, o plokštumos α skritulys K — kūgio pagrindas. Kūgį sudaro visos atkarpos SX, jungiančios viršūnę S su pagrindo taškais X.



290 pav.


291 pav.



292 pav.

Statųjį kūgį galima nagrinėti kaip kūną, gautą, statųjį trikampį sukant apie statinį, kaip apie ašį (291 pav.).

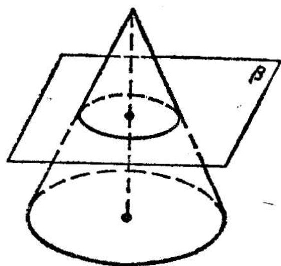
Kūgio *aukštine* vadinamas statmuo, išvestas iš kūgio viršūnės į pagrindo plokštumą. Stačiojo kūgio aukštinės pagrindas sutampa su pagrindo centru. Stačiojo kūgio *ašimi* vadinama tiesė, einanti per kūgio aukštinę. Kūgio pjūvis, gautas, kūgį perkirtus plokštuma, einančia per kūgio ašį, vadinamas *ašiniu pjūviu*. Plokštuma, einanti per kūgio sudaromąją ir statmena per tą sudaromąją einančiam ašiniam pjūviui, vadinama kūgio *liečiamąja plokštuma*.

Uždavinys (12). Lygiakraščio kūgio (jo ašinis pjūvis — taisyklingasis trikampis) pagrindo spindulys R. Per dvi sudaromąsias išvestas kūgio pjūvis. Kampas tarp tų sudaromųjų lygus α. Raskite pjūvio plotą.

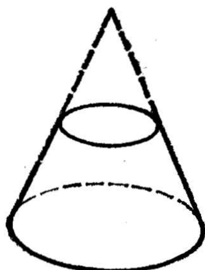
Sprendimas. Pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio šoninės kraštinės lygios pagrindo skersmeniui ($2R$), o kampas tarp jų lygus α (292 pav.). To trikampio plotas lygus $\frac{1}{2}(2R)\times$ $\times(2R)\sin\alpha=2R^2\sin\alpha$.

19.2 teorema. ***Kūgio ašiai statmena plokštuma kerta kūgį skrituliu, o kūgio šoninį paviršių — apskritimu; jų centras yra kūgio ašyje.***

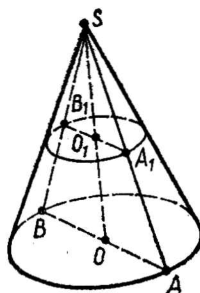
Įrodymas. Sakykime, β — kūgio ašiai statmena plokštuma, kertanti kūgį (293 pav.). Homotetija kūgio viršūnės atžvilgiu, kuri plokštumą β sutapdina su pagrindo plokštuma, kūgio pjūvį, gautą, kūgį perkirtus plokštuma β, sutapdina su kūgio pagrindu. Vadinasi, tas pjūvis yra skritulys, o kūgio šoninio paviršiaus pjūvis — apskritimas. Pjūvių centras yra kūgio ašyje.



293 pav.



294 pav.



295 pav.

Kūgio ašiai statmena plokštuma nuo kūgio nukerta mažesnį kūgį. Likusioji dalis vadinama *nupjautiniu kūgiu* (294 pav.).

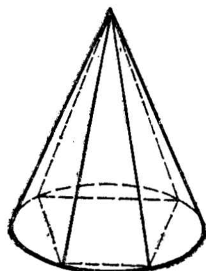
Uždavinys (15). Kūgis perkirstas pagrindui lygiagrečia plokštuma, kurios atstumas nuo kūgio viršūnės lygus d. Kūgio pagrindo spindulys R, o aukštinė H. Raskite pjūvio plotą.

Sprendimas. Išveskime kūgio ašinį pjūvį (295 pav.). Iš trikampių SAB ir SA_1B_1 panašumo gauname: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SO_1}{SO}$. Kadangi $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$ (r — pjūvio spindulys), $OS = H$, $O_1S = d$, tai

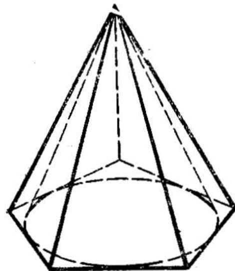
$$\frac{2r}{2R} = \frac{d}{H}, \quad r = \frac{Rd}{H}.$$

Pjūvio plotas $\pi r^2 = \pi \left(\frac{Rd}{H}\right)^2$.

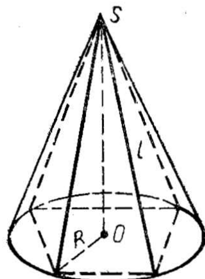
Į kūgį įbrėžta piramide vadinama tokia piramidė, kurios pagrindas yra į kūgio pagrindo apskritimą įbrėžtas daugiakampis, o viršūnė — kūgio viršūnė (296 pav.). Įbrėžtos į kūgį piramidės šoninės briaunos yra kūgio sudaromosios. *Apibrėžta apie kūgį* piramide vadinama tokia piramidė, kurios pagrindas yra apie kūgio pagrindą apibrėžtas daugiakampis, o viršūnė sutampa su kūgio viršūne (297 pav.). Apie kūgį apibrėžtos piramidės šoninių sienų plokštumos yra kūgio liečiamosios plokštumos.



296 pav.



297 pav.



298 pav.

Uždavinys (27). Piramidės visos šoninės briaunos lygios. Įrodykite, kad ją galima įbrėžti į tam tikrą kūgį.

Sprendimas. Iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą išveskime statmenį SO (298 pav.). Piramidės šoninių briaunų ilgį pažymėkime l. Pagrindo viršūnės nuo taško O nutolusios tuo pačiu atstumu $R=\sqrt{l^2-OS^2}$. Iš čia išeina, kad piramidė yra įbrėžta į kūgį, kurio viršūnė yra piramidės viršūnė, o pagrindas — skritulys, kurio centras O ir spindulys R.

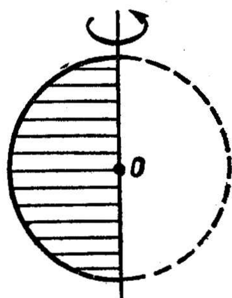
RUTULYS

Rutuliu vadinamas kūnas, sudarytas iš visų tų erdvės taškų, kurie nuo vieno taško nutolę atstumu, ne didesniu už kurį nors atstumą. Tas taškas vadinamas *rutulio centru*, o atstumas — *rutulio spinduliu*. Rutulio kraštas vadinamas *rutulio paviršiumi*, arba *sfera*. Taigi sferos taškai yra tie rutulio taškai, kurių atstumas nuo rutulio centro lygus spinduliui. Kiekviena atkarpa, jungianti rutulio centrą su rutulio paviršiaus tašku, irgi vadinama spinduliu. Atkarpa, jungianti du rutulio paviršiaus taškus ir einanti per rutulio centrą, vadinama *rutulio skersmeniu*. Kiekvieno skersmens galai vadinami *rutulio diametraliai priešingais taškais*.

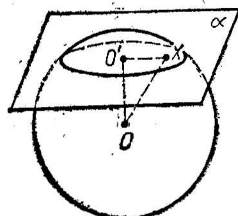
Rutulys, kaip ritinys ir kūgis, yra sukinys (sukimosi kūnas). Jis gaunamas pusskritulį sukant apie skersmenį, kaip apie ašį (299 pav.).

19.3 teorema. ***Rutulio pjūvis, gautas, rutulį perkirtus plokštuma, yra skritulys. To skritulio centras yra statmens, išvesto iš rutulio centro į kertančiąją plokštumą, pagrindas.***

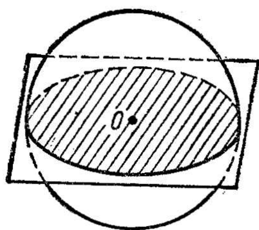
Įrodymas. Sakykime, α — kertančioji plokštuma, O — rutulio centras (300 pav.). Iš rutulio centro į plokštumą α išveskime statmenį, to statmens pagrindą pažymėkime O'. Sakykime, X — bet kuris rutulio taškas, esantis plokštumoje α. Remiantis Pitagoro teorema, $OX^2=OO'^2+O'X^2$. Kadangi OX ne didesnis už rutulio spindulį R, tai $O'X\leqslant\sqrt{R^2-OO'^2}$, t. y. kiekvienas rutulio pjūvio, gauto, rutulį perkirtus plokštuma α, taškas nutolęs nuo taško O' atstumu, ne didesniu už $\sqrt{R^2-OO'^2}$, vadinasi, jis yra skritulio, kurio centras O' ir spindulys $\sqrt{R^2-OO'^2}$, taškas. Atvirkščiai, kiekvienas to skritulio taškas X priklauso rutuliui. Tai reiškia, kad rutulio pjūvis, gautas, rutulį perkirtus plokštuma α, yra skritulys, kurio centras — taškas O'. Teorema įrodyta.



299 pav.



300 pav.



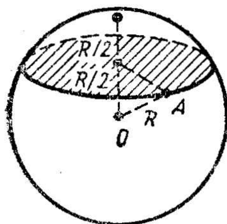
301 pav.

Iš teoremos įrodymo išplaukia, kad pjūvio spindulys

$$R'=\sqrt{R^2-OO'^2}.$$

Iš čia aišku, kad *plokštumos, vienodai nutolusios nuo rutulio centro, kerta jį lygiais skrituliais.* Rutulio pjūvis, gautas, rutulį perkirtus plokštuma α, tuo didesnis skritulys, kuo plokštuma α arčiau rutulio centro, t. y. kuo mažesnis atstumas OO'. Didžiausią skritulį gausime tada, kai rutulį kirsime plokštuma, einančia per rutulio centrą. To skritulio spindulys lygus rutulio spinduliui.

Plokštuma, einanti per rutulio centrą, vadinama *skersmenine plokštuma.* Rutulio pjūvis, gautas, perkirtus rutulį skersmenine plokštuma, vadinamas *didžiuoju skrituliu* (301 pav.), o sferos pjūvis ta plokštuma — *didžiuoju apskritimu.*



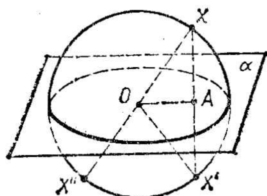
302 pav.

Uždavinys (29). Per rutulio spindulio vidurį išvesta tam spinduliui statmena plokštuma. Koks pjūvio ir didžiojo skritulio plotų santykis?

Sprendimas. Jei rutulio spindulys R (302 pav.), tai pjūvio spindulys $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Pjūvio ploto ir didžiojo skritulio ploto santykis lygus $\dfrac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\dfrac{3}{4}$.

19.4 teorema. ***Rutulio skersmeninė plokštuma yra rutulio simetrijos plokštuma. Rutulio centras yra rutulio simetrijos centras.***

Įrodymas. Sakykime, α — skersmeninė plokštuma, X — bet kuris rutulio taškas (303 pav.). Nagrinėkime tašką X', simetrišką taškui X plokštumos α atžvilgiu. Atkarpa XX' statmena plokštumai α, kerta tą plokštumą, susikirtimo taškas (A) yra atkarpos vidurys. Iš stačiųjų trikampių OAX ir OAX' lygumo išeina, kad $OX'=OX$. Kadangi $OX\leqslant R$, tai ir $OX'\leqslant R$, t. y. taškas, simetriškas taškui X, priklauso rutuliui. Pirmasis teoremos teiginys įrodytas.



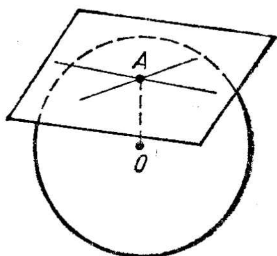
303 pav.

Sakykime, X'' — taškas, simetriškas taškui X rutulio centro atžvilgiu. Tada $OX''=OX\leqslant R$, t. y. taškas X'' priklauso rutuliui. Teorema įrodyta.

Plokštuma, einanti per rutulio paviršiaus tašką A ir statmena į tą tašką išvestam spinduliui, vadinama *liečiamąja plokštuma.* Taškas A vadinamas *lietimosi tašku* (304 pav.).

19.5 teorema. ***Liečiamoji plokštuma ir rutulys turi tik vieną bendrą tašką — lietimosi tašką.***

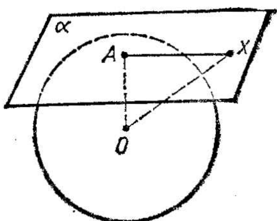
Įrodymas. Sakykime, α — rutulio liečiamoji plokštuma, A — lietimosi taškas (305 pav.). Pasirinkime bet kokį plokštumos α tašką X, nesutampantį su tašku A. Kadangi OA — statmuo, OX — pasviroji, tai $OX > OA = R$. Vadinasi, taškas X nepriklauso rutuliui. Teorema įrodyta.



304 pav.

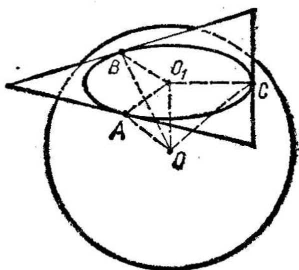
Tiesė, einanti per rutulio paviršiaus tašką A ir statmena į tą tašką išvestam spinduliui, vadinama *liestine.*

19.6 teorema. ***Per kiekvieną rutulio paviršiaus tašką eina begalinė liestinių aibė, visos liestinės yra rutulio liečiamojoje plokštumoje.***



305 pav.

Įrodymas. Iš tikrųjų, sakykime, α — rutulio liečiamoji plokštuma taške A (žr. 305 pav.). Tada kiekviena per tašką A einanti plokštumos α tiesė yra statmena spinduliui OA, vadinasi, ji — liestinė. Kiekviena per tašką A einanti liestinė statmena spinduliui OA, todėl ji yra plokštumoje α.



306 pav.

Uždavinys (38). Rutulio spindulys R. Taisyklingojo trikampio kraštinė a. Rutulys liečia visas to trikampio kraštines. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki trikampio plokštumos.

Sprendimas. Sakykime, A, B, C — rutulio ir trikampio kraštinių lietimosi taškai (306 pav.). Iš rutulio centro O išveskime į trikampio plokštumą statmenį OO_1. Atkarpos OA, OB, OC statmenos trikampio kraštinėms. Remiantis trijų statmenų teorema, atkarpos O_1A, O_1B, O_1C irgi statmenos atitinkamoms trikampio kraštinėms. Kadangi statieji trikampiai OO_1A, OO_1B ir OO_1C lygūs (jų statinis OO_1 bendras, o įžambinės lygios rutulio spinduliui), tai atitinkamos kraštinės lygios: $O_1A = O_1B = O_1C$. Vadinasi, O_1 — į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. To apskritimo spindulys lygus $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (žinoma iš planimetrijos). Pritaikę Pitagoro teoremą, randame ieškomąjį atstumą. Jis lygus

$$\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}.$$

SFEROS LYGTIS

Sudarysime sferos lygtį dekartinėse koordinatėse x, y, z. Sakykime, sferos centras yra taškas $A(a, b, c)$, o sferos spindulys R. Sferos taškai yra tie ir tik tie erdvės taškai, kurių atstumai nuo taško A lygūs R. Atstumo nuo taško (x, y, z) iki taško A kvadratas lygus

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

todėl sferos lygtis yra

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Jei sferos centras yra koordinačių pradžia, tai sferos lygtis yra

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Uždavinys (43). Sfera eina per taškus (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0). Sudarykite sferos lygtį.

Sprendimas. Sferos lygtis yra $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=$ $=R^2$. Nurodytų taškų koordinatės turi tenkinti sferos lygtį. Į tą lygtį įrašę taškų koordinates, gauname lygčių sistemą nežinomiesiems a, b, c ir R rasti:

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2=R^2,\\ &a^2+b^2+(1-c)^2=R^2,\\ &a^2+(1-b)^2+c^2=R^2,\\ &(1-a)^2+b^2+c^2=R^2. \end{aligned}$$

Panariui atimdami pirmąją lygtį iš kitų lygčių, gauname:

$2c-1=0$, $2b-1=0$, $2a-1=0$. Iš čia

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2},\ \text{taigi}\ R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Ieškomoji sferos lygtis

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

19.7 teorema. ***Dviejų sferų susikirtimo linija yra apskritimas.***

Įrodymas. Per sferų centrus einančią tiesę laikykime ašimi x. Sakykime, taškas $(a, 0, 0)$ — pirmos sferos centras, R_1 — jos spindulys; taškas $(b, 0, 0)$ — antros sferos centras, R_2 — jos spindulys. Tada sferų lygtys yra:

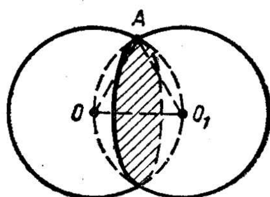
$$(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2, \qquad (1)$$

$$(x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2. \qquad (2)$$

Sferų susikirtimo taškai yra tie erdvės taškai, kurie tenkina (1) ir (2) lygtį. Vadinasi, jie turi tenkinti ir lygtį, kurią gausime iš (1) lygties panariui atėmę (2) lygtį, t. y. lygtį

$$2(b-a)x=R_1^2-R_2^2-a^2+b^2. \qquad (3)$$

Gautoji lygtis yra plokštumai yz lygiagrečios plokštumos lygtis. Taigi sferų susikirtimo linija sutampa su (3) lygtimi nusakytos plokštumos ir bet kurios tų sferų susikirtimo linija. Žinome, kad sferos pjūvis, gautas, sferą perkirtus plokštuma, yra apskritimas. Teorema įrodyta.



307 pav.

Uždavinys (45). Kiekvieno iš dviejų lygių rutulių, kurių spindulys R, centras yra kito rutulio paviršiuje. Raskite jų paviršių susikirtimo linijos ilgį.

Sprendimas. Per rutulių centrus išveskime pjūvį (307 pav.). Linija, apie kurią kalbama uždavinio sąlygoje, yra apskritimas (19.7 teorema). Jo spindulys lygus lygiakraščio trikampio OAO_1, kurio kraštinės lygios R, aukštinei. Aukštinė lygi $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Vadinasi, linijos ilgis lygus $\pi R\sqrt{3}$.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Paaiškinkite, kas yra apskritasis ritinys (ritinio sudaromoji, ritinio pagrindai ir šoninis paviršius).
2. Koks ritinys vadinamas stačiuoju?
3. Kas yra ritinio spindulys, ritinio aukštinė, ritinio ašis, ritinio ašinis pjūvis, ritinio liečiamoji plokštuma?
4. Įrodykite, kad ritinio ašiai statmena plokštuma kerta ritinio šoninį paviršių apskritimu, lygiu pagrindo apskritimui.
5. Kas yra į ritinį įbrėžta (apie ritinį apibrėžta) prizmė?
6. Kas yra apskritasis kūgis, kūgio viršūnė, kūgio sudaromoji, kūgio pagrindas, kūgio šoninis paviršius?
7. Koks kūgis vadinamas stačiuoju?
8. Kas yra kūgio aukštinė, kūgio ašis, kūgio ašinis pjūvis, kūgio liečiamoji plokštuma?
9. Įrodykite, kad kūgio ašiai statmena plokštuma kerta kūgio šoninį paviršių apskritimu, kurio centras yra kūgio ašyje.
10. Kas yra nupjautinis kūgis?
11. Kokia piramidė vadinama įbrėžta į kūgį (apibrėžta apie kūgį)?
12. Kas yra rutulys (rutulio paviršius, arba sfera)?
13. Kas yra rutulio spindulys, rutulio skersmuo? Kokie rutulio taškai vadinami diametraliai priešingais?
14. Įrodykite, kad rutulio pjūvis, gautas, rutulį perkirtus plokštuma, yra skritulys.
15. Kokia plokštuma vadinama rutulio skersmenine plokštuma? Kas yra didysis skritulys?

16. Įrodykite, kad rutulio skersmeninė plokštuma yra rutulio simetrijos plokštuma. Įrodykite, kad rutulio centras yra rutulio simetrijos centras.
17. Kokia plokštuma vadinama rutulio liečiamąja plokštuma?
18. Įrodykite, kad rutulio liečiamoji plokštuma ir rutulys turi tik vieną bendrą tašką — lietimosi tašką.
19. Kokia tiesė vadinama rutulio liestine? Įrodykite, kad per kiekvieną rutulio paviršiaus tašką eina begalinė liestinių aibė, kad visos liestinės yra rutulio liečiamojoje plokštumoje.
20. Išveskite sferos lygtį.
21. Įrodykite, kad dviejų sferų susikirtimo linija yra apskritimas.

PRATIMAI

1. Ritinio pagrindo spindulys 2 m, aukštinė 3 m. Apskaičiuokite ašinio pjūvio įstrižainę.
2. Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas, kurio plotas Q. Raskite ritinio pagrindo plotą.
3. Ritinio aukštinė 6 cm, pagrindo spindulys 5 cm. Ritinio pjūvis yra lygiagretus ritinio ašiai ir nutolęs nuo jos 4 cm. Apskaičiuokite pjūvio plotą.
4. Ritinio aukštinė 8 dm, pagrindo spindulys 5 dm. Ritinys perkirstas plokštuma taip, kad gautas pjūvis yra kvadratas. Apskaičiuokite atstumą nuo to pjūvio iki ašies.
5. Ritinio aukštinė 6 dm, pagrindo spindulys 5 dm. Atkarpos, kurios ilgis 10 dm, galai priklauso pagrindų apskritimams. Raskite trumpiausią atstumą nuo tos atkarpos iki ritinio ašies.
6. Lygiakraščio ritinio (ritinio, kurio skersmuo lygus aukštinei) viršutinio pagrindo apskritimo taškas sujungtas su apatinio pagrindo apskritimo tašku. Kampas tarp spindulių, išvestų į tuos taškus, lygus 60°. Raskite kampą x tarp išvestosios tiesės ir ritinio ašies.
7. Į ritinį įbrėžta taisyklingoji šešiakampė prizmė. Ritinio pagrindo spindulys lygus ritinio aukštinei. Raskite kampą tarp prizmės šoninės sienos įstrižainės ir ritinio ašies.
8. Ritinio aukštinė 2 m, pagrindo spindulys 7 m. Įstrižai į ritinį įbrėžtas kvadratas, kurio visos viršūnės priklauso pagrindų apskritimams. Apskaičiuokite kvadrato kraštinę.
9. Kūgio pagrindo spindulys 3 m, aukštinė 4 m. Raskite kūgio sudaromąją.
10. Kūgio sudaromoji l į pagrindo plokštumą pasvirusi 30° kampu. Raskite kūgio aukštinę.
11. Kūgio pagrindo spindulys R, o ašinis pjūvis — statusis trikampis. Raskite jo plotą.
12. Lygiakraščio kūgio (jo ašinis pjūvis — taisyklingasis trikampis) pagrindo spindulys R. Per dvi sudaromąsias išvestas kūgio pjūvis. Kampas tarp tų sudaromųjų lygus α. Raskite pjūvio plotą.

13. Kūgio aukštinė lygi 20, jo pagrindo spindulys lygus 25. Per kūgio viršūnę išvestas pjūvis. Atstumas nuo pjūvio iki kūgio pagrindo centro lygus 12. Raskite pjūvio plotą.

14. Kūgio pagrindo spindulys R, o sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Per kūgio viršūnę išvesta plokštuma, su kūgio aukštine sudaranti kampą φ. Raskite gauto pjūvio plotą.

15. Kūgis perkirstas pagrindui lygiagrečia plokštuma, kurios atstumas nuo kūgio viršūnės lygus d. Kūgio pagrindo spindulys R, o aukštinė H. Raskite pjūvio plotą.

16. Kūgio aukštinė H. Kokiu atstumu nuo viršūnės reikia išvesti pagrindui lygiagrečią plokštumą, kad pjūvio plotas būtų lygus pusei pagrindo ploto?

17. Per kūgio aukštinės vidurį išvesta sudaromajai l lygiagreti tiesė. Raskite ilgį tos tiesės atkarpos, esančios kūgio viduje.

18. Kūgio sudaromoji 13 cm, aukštinė 12 cm. Kūgis perkirstas pagrindui lygiagrečia tiese; atstumas nuo jos iki pagrindo lygus 6 cm, o iki aukštinės — 2 cm. Apskaičiuokite kūgio viduje esančios tos tiesės atkarpos ilgį.

19. Kūgio pagrindo spindulys R, aukštinė H. Raskite į kūgį įbrėžto kubo briauną.

20. Kūgio pagrindo spindulys R, aukštinė H. Į kūgį įbrėžta taisyklingoji trikampė prizmė, kurios šoninės sienos — kvadratai. Raskite prizmės briauną.

21. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 3 m ir 6 m, aukštinė lygi 4 m. Apskaičiuokite sudaromąją.

22. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai R ir r; sudaromoji pasvirusi į pagrindą 45° kampu. Raskite aukštinę.

23. Nupjautinio kūgio sudaromoji lygi $2a$ ir pasvirusi į pagrindą 60° kampu. Vieno pagrindo spindulys du kartus ilgesnis už kito pagrindo spindulį. Raskite pagrindų spindulius.

24. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 3 dm ir 7 dm, sudaromoji lygi 5 dm. Apskaičiuokite ašinio pjūvio plotą.

25. Nupjautinio kūgio pagrindų plotai lygūs 4 dm^2 ir 16 dm^2. Per aukštinės vidurį išvesta pagrindams lygiagreti plokštuma. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

26. Nupjautinio kūgio pagrindų plotai M ir m. Raskite pagrindams lygiagretaus vidurinio pjūvio plotą.

27. Piramidės visos šoninės briaunos lygios. Įrodykite, kad ją galima įbrėžti į tam tikrą kūgį.

28. Rutulys, kurio spindulys 41 dm, perskirstas plokštuma, kurios atstumas nuo rutulio centro 9 dm. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

29. Per rutulio spindulio vidurį išvesta tam spinduliui statmena plokštuma. Koks pjūvio ir didžiojo skritulio plotų santykis?

30. Rutulio spindulys R. Per spindulio galą išvesta plokštuma, su spinduliu sudaranti 60° kampą. Raskite gauto pjūvio plotą.

31. Rutulio spindulys R. Per vieną jo paviršiaus tašką išvestos dvi plokštumos: viena — rutulio liečiamoji plokštuma, kita — su pirmąja sudaranti 30° kampą. Raskite pjūvio plotą.

32. Žemės rutulio spindulys R. Platuma 60°. Koks jos lygiagretės ilgis?
33. Kokį kelią per 1 h nuskrieja miestas, esantis 60° šiaurės platumos lygiagretėje. Žemės spindulį laikykite lygiu 6 000 km.
34. Atstumai tarp trijų rutulio paviršiaus taškų (tiese) lygūs 6 cm, 8 cm ir 10 cm. Rutulio spindulys 13 cm. Apskaičiuokite atstumą nuo rutulio centro iki plokštumos, einančios per tuos tris taškus.
35. Rutulio skersmuo 25 cm. Nagrinėjamas jo paviršiaus taškas A ir apskritimas, kurio kiekvieno taško atstumas (tiese) nuo taško A lygus 15 cm. Raskite to apskritimo spindulį.
36. Pusrutulis ir į jį įbrėžtas kūgis turi bendrą pagrindą ir bendrą aukštinę. Per aukštinės vidurį išvesta pagrindui lygiagreti plokštuma. Įrodykite, kad pjūvio, esančio tarp kūgio šoninio paviršiaus ir pusrutulio paviršiaus, plotas lygus pusei pagrindo ploto.
37. Kūną (tuščiavidurį rutulį) riboja dviejų koncentrinių rutulių paviršiai. Įrodykite, kad to kūno pjūvis, gautas, kūną perkirtus per centrą einančia plokštuma, yra lygiaplotis su pjūviu, gautu, kūną perkirtus vidinio rutulio paviršiaus liečiamąja plokštuma.
38. Rutulio spindulys R. Taisyklingojo trikampio kraštinė a. Rutulys liečia visas to trikampio kraštines. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki trikampio plokštumos.
39. Trikampio kraštinės 13 cm, 14 cm ir 15 cm. Rutulys, kurio spindulys 5 cm, liečia visas trikampio kraštines. Raskite atstumą nuo trikampio plokštumos iki rutulio centro.
40. Rombo įstrižainės 15 cm ir 20 cm. Rutulio, kurio spindulys 10 cm, paviršius liečia visas rombo kraštines. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki rombo plokštumos.
41. Per rutulio paviršiaus tašką išvestos dvi viena kitai statmenos plokštumos. Tos plokštumos kerta rutulį dviem skrituliais, kurių spinduliai r_1 ir r_2. Raskite rutulio spindulį R.
42. Rutulio spindulys 7 cm. Du rutulio paviršiuje esantys lygūs apskritimai turi bendrą stygą, kurios ilgis 2 cm. Apskritimų plokštumos viena kitai statmenos. Raskite tų apskritimų spindulį.
43. Sfera eina per taškus (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0). Sudarykite sferos lygtį.
44. Sferos spindulys lygus 3, sfera eina per taškus (0, 0, 0), (4, 0, 0), (0, 4, 0). Sudarykite sferos lygtį.
45. Kiekvieno iš dviejų lygių rutulių, kurių spindulys R, centras yra kito rutulio paviršiuje. Raskite jų paviršių susikirtimo linijos ilgį.
46. Rutulių spinduliai lygūs 25 dm ir 29 dm, o atstumas tarp jų centrų lygus 36 dm. Apskaičiuokite rutulių paviršių susikirtimo linijos ilgį.
47. Apie kubą, kurio briauna a, apibrėžtas rutulys. Raskite rutulio spindulį.

48. Apie taisyklingąjį tetraedrą, kurio briauna a, apibrėžtas rutulys. Raskite rutulio spindulį.

49. Rutulys, kurio spindulys R, įbrėžtas į nupjautinį kūgį. Kūgio sudaromoji pasvirusi į apatinio pagrindo plokštumą kampu α. Raskite nupjautinio kūgio pagrindų spindulius ir sudaromąją.

50. Taisyklingoji n-kampė prizmė įbrėžta į rutulį, kurio spindulys R. Prizmės pagrindo briauna lygi a. Raskite prizmės aukštinę, kai: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.

51. Taisyklingosios n-kampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, dvisienis kampas prie pagrindo lygus φ. Raskite į piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

52. Taisyklingosios n-kampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Raskite apie piramidę apibrėžto rutulio spindulį.

53. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite į piramidę įbrėžto ir apie piramidę apibrėžto rutulių spindulius.

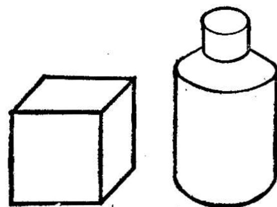
54. Į rutulį, kurio spindulys R, įbrėžta taisyklingoji trikampė piramidė, kurios plokštieji kampai prie viršūnės lygūs α. Raskite piramidės aukštinę.

§ 20. KŪNŲ TŪRIAI

TŪRIO SĄVOKA

Įsivaizduokite du indus: vieną — kubo formos, kitą — bet kokios formos (308 pav.). Sakykime, abu indai iki viršaus pripilti skysčio. Tarkime, kad pirmajam indui pripilti reikėjo m kg skysčio, o antrajam indui pripilti — n kg skysčio. Natūralu laikyti, kad antrasis indas $\frac{n}{m}$ kartų didesnis už pirmąjį. Skaičių, kuris parodo, kiek kartų antrasis indas didesnis už pirmąjį, vadinsime antrojo indo *tūriu*; tokiu atveju pirmasis indas yra matavimo vienetas. Iš tokio tūrio sąvokos apibrėžimo išplaukia šitokios tūrio savybės. Pirma, kadangi kiekvienam indui pripilti reikia tam tikro kiekio skysčio, tai kiekvienas indas turi tam tikrą (teigiamą) tūrį. Antra, lygiems indams pripilti reikia po tiek pat skysčio, todėl lygių indų tūriai yra lygūs. Trečia, jei indą padalysime į dvi dalis, tai visam indui pripilti reikės tiek skysčio, kiek jo reikia dalims pripilti. Vadinasi, vieno indo tūris lygus jo dalių tūrių sumai.

Paprastuoju kūnu vadinsime kūną, kurį galima suskaidyti į baigtinį skaičių tetraedrų, t. y. trikampių piramidžių. Skyrium imant, prizmė, piramidė ir apskritai bet kuris iškilasis briaunainis yra paprastieji kūnai.



308 pav.

Gausime formules paprastųjų kūnų tūriams apskaičiuoti. Remsimės jau minėtomis tūrio savybėmis, t. y. laikysime, kad:

1) kai turimas matavimo vienetas, kiekvienas paprastasis kūnas turi tam tikrą tūrį;

2) lygių kūnų tūriai yra lygūs;

3) jei paprastąjį kūną padalysime į keletą paprastųjų kūnų, tai to kūno tūris bus lygus jo dalių tūrių sumai.

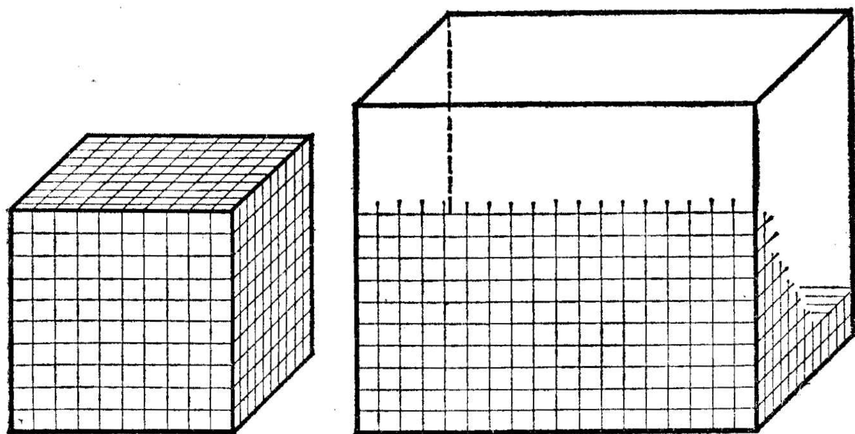
STAČIAKAMPIO GRETASIENIO TŪRIS

Rasime stačiakampio gretasienio tūrį. 309 paveiksle pavaizduotas kubas, kuris yra tūrio matavimo vienetas, ir stačiakampis gretasienis, kurio tūrį reikia rasti. Kubo briauna yra ilgio matavimo vienetas.

Iš pradžių išnagrinėkime atvejį, kai gretasienio briaunų ilgiai a, b ir c išreiškiami baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis ir dešimtainių ženklų po kablelio yra ne daugiau kaip n.

Iš vienos viršūnės išeinančias kubo briaunas padalykime į 10^n lygių dalių ir per dalijimo taškus išveskime toms briaunoms statmenas plokštumas. Tada kubą padalysime į $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ mažų kubų, kurių briaunos lygios $\frac{1}{10^n}$.

Rasime mažojo kubo tūrį. Remiantis tūrio savybe, didžiojo kubo tūris lygus mažųjų kubų tūrių sumai. Kadangi didžiojo kubo tūris lygus vienetui, o mažųjų kubų skaičius lygus 10^{3n}, tai mažojo kubo tūris lygus $\frac{1}{10^{3n}}$.



309 pav.

Kadangi skaičiai $\frac{a}{\frac{1}{10^n}}=a\cdot 10^n$, $\frac{b}{\frac{1}{10^n}}=b\cdot 10^n$, $\frac{c}{\frac{1}{10^n}}=c\cdot 10^n$ yra sveikieji skaičiai, tai gretasienio briaunas galima padalyti į sveiką skaičių dalių, lygių $\frac{1}{10^n}$. Briaunoje a bus $a\cdot 10^n$ tokių dalių, briaunoje b — $b\cdot 10^n$, briaunoje c — $c\cdot 10^n$. Per briaunų dalijimo taškus išveskime briaunoms statmenas plokštumas. Tada gretasienį padalysime į mažus kubus, kurių briauna $\frac{1}{10^n}$. Tokių kubų skaičius lygus $a10^n\cdot b10^n\cdot c10^n=abc10^{3n}$. Gretasienio tūris lygus jame esančių mažųjų kubų tūrių sumai. Kadangi mažojo kubo tūris lygus $\frac{1}{10^{3n}}$, o tokių kubų yra $abc\cdot 10^{3n}$, tai gretasienio tūris lygus $abc\cdot 10^{3n}\cdot\frac{1}{10^{3n}}=abc$.

Dabar išnagrinėkime atvejį, kai bent vienos briaunos ilgis a, b, c išreiškiamas begaline dešimtaine trupmena. Skaičiaus a n dešimtainių ženklų tikslumo artinius su trūkumu ir su pertekliumi pažymėkime a_1 ir a_2. Skaičių b ir c to paties tikslumo artinius pažymėkime b_1 ir b_2, c_1 ir c_2. Gretasienio, kurio briaunos a_1, b_1, c_1, tūris mažesnis už nagrinėjamo gretasienio tūrį, nes jis telpa nagrinėjamo gretasienio viduje. Gretasienio, kurio briaunos a_2, b_2, c_2, tūris didesnis už nagrinėjamo gretasienio tūrį, nes nagrinėjamasis gretasienis telpa jo viduje. Jau įrodyta, kad gretasienio, kurio briaunos a_1, b_1, c_1, tūris lygus $a_1b_1c_1$, o gretasienio, kurio briaunos a_2, b_2, c_2, tūris lygus $a_2b_2c_2$. Taigi nagrinėjamo gretasienio tūris yra tarp $a_1b_1c_1$ ir $a_2b_2c_2$. Kadangi $a_1b_1c_1$ ir $a_2b_2c_2$, kai n pakankamai didelis, yra skaičiaus abc bet kurio iš anksto nurodyto tikslumo artiniai, tai $V=abc$. Taigi ***stačiakampio gretasienio tūrio formulė yra***

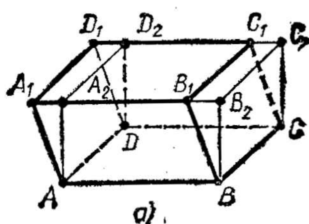
$$V=abc.$$

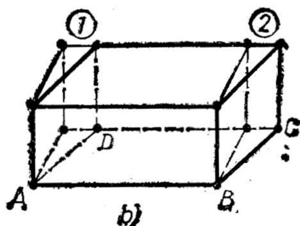
Uždavinys (3). Kiekvieną kubo briauną padidinus 2 cm, gauto kubo tūris 98 cm^3 didesnis už pradinio kubo tūrį. Apskaičiuokite pradinio kubo briauną.

Sprendimas. Kubo briauną pažymėkime x. Tada $(x+2)^3-x^3=98$, t. y. $x^2+2x-15=0$. Lygtis turi dvi šaknis: $x=3$, $x=-5$. Geometrinę prasmę turi tik teigiamoji šaknis. Taigi pradinio kubo briauna lygi 3 cm.

PASVIROJO GRETASIENIO TŪRIS

Rasime pasvirojo gretasienio (310 pav., a) tūrį. Per briauną BC išveskime plokštumą, statmeną pagrindui $ABCD$, ir gretasienį papildykime trikampe prizme $BB_1B_2CC_1C_2$. Plokštuma, einančia per briauną AD ir statmena pagrindui $ABCD$, nuo gautojo kūno



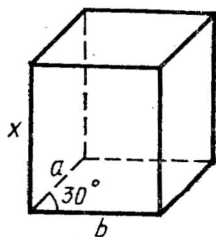


310 pav.

nukirskime trikampę prizmę. Vėl gausime gretasienį. To gretasienio tūris lygus pradinio gretasienio tūriui. Iš tikrųjų, nukirstoji prizmė su papildančiąja prizme sutapdinama lygiagrečiuoju postūmiu per atkarpą AB, todėl jų tūriai lygūs. Taip perkonstruoto gretasienio nepasikeičia pagrindo plotas ir aukštinė. Dviejų šoninių sienų plokštumos lieka tos pačios, o kitos dvi tampa statmenos pagrindui. Tą patį padarykime kitų dviejų pasvirųjų gretasienio šoninių sienų atžvilgiu. Gausime gretasienį, kurio visos šoninės sienos statmenos pagrindui, t. y. statųjį gretasienį. Gautą statųjį gretasienį panašiai perkonstruokime į stačiakampį gretasienį: iš pradžių papildysime 1 prizme, po to nukirsime 2 prizmę (310 pav., *b*). Taip konstruojant irgi nekinta gretasienio tūris, pagrindo plotas ir aukštinė.

Stačiakampio gretasienio tūris lygus jo matmenų sandaugai. Dviejų matmenų sandauga yra gretasienio pagrindo plotas, o trečiasis matmuo — jo aukštinė. Taigi stačiakampio gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai. Kadangi aprašytuoju būdu nagrinėjamą gretasienį perkonstravus į stačiakampį gretasienį, kiekvieną kartą nepakinta gretasienio tūris, pagrindo plotas ir aukštinė, tai nagrinėjamo gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.

Taigi ***kiekvieno gretasienio tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.***



311 pav.

Uždavinys (9). Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės a ir b, kampas tarp jų 30°, šoninis paviršius lygus S. Raskite gretasienio tūrį.

Sprendimas. Gretasienio aukštinę pažymėkime x (311 pav.). Tada $(2a+2b)x=S$. Iš čia $x=\frac{S}{2(a+b)}$. Gretasienio pagrindo plotas lygus $ab\sin 30°=\frac{ab}{2}$. Gretasienio tūris lygus $\frac{abS}{4(a+b)}$.

Rasime prizmės tūrį. Iš pradžių išnagrinėkime trikampę prizmę (312 pav.). Ją papildykime iki gretasienio, kaip parodyta paveiksle. Taškas O yra gretasienio simetrijos centras, todėl papildančioji prizmė simetriška pradinei prizmei taško O atžvilgiu, taigi jos tūris lygus pradinės prizmės tūriui. Vadinasi, gautojo gretasienio tūris lygus dvigubam nagrinėjamos prizmės tūriui. Gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai. Gretasienio pagrindo plotas lygus dvigubam trikampio ABC plotui, o aukštinė lygi nagrinėjamos prizmės aukštinei. Iš čia išeina, kad nagrinėjamos prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.

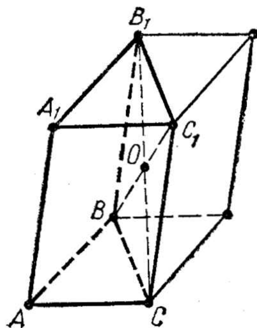
Dabar nagrinėkime bet kokią prizmę (313 pav.). Jos pagrindą padalykime į trikampius. Sakykime, Δ — vienas tų trikampių. Per bet kurį trikampio Δ tašką X išveskime šoninėms briaunoms lygiagrečią tiesę. Sakykime, a_x — tos tiesės atkarpa, esanti prizmėje. Kai taškas X užpildo trikampį Δ, atkarpos a_x užpildo trikampę prizmę. Taigi kiekvieną dalinio trikampį Δ atitiks trikampė prizmė, ir nagrinėjamoji prizmė bus padalyta į trikampes prizmes. Visų tų prizmių aukštinė ta pati, ji lygi nagrinėjamos prizmės aukštinei.

Nagrinėjamos prizmės tūris lygus ją sudarančių trikampių prizmių tūrių sumai. Jau įrodyta, kad trikampės prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai. Iš čia išeina, kad nagrinėjamos prizmės tūris

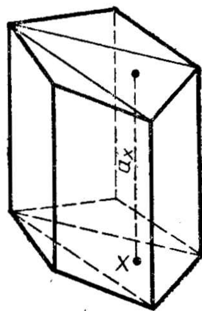
$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H;$$

čia $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — trikampių Δ, į kuriuos padalytas prizmės pagrindas, plotai, H — prizmės aukštinė. Trikampių Δ plotų suma lygi nagrinėjamos prizmės pagrindo plotui S, todėl

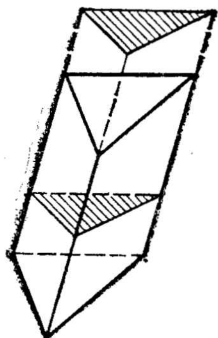
$$V = SH.$$



312 pav.



313 pav.


314 pav.

Taigi *prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

Uždavinys (21). Pasvirosios prizmės pjūvio, statmeno šoninėms briaunoms ir kertančio visas šonines briaunas, plotas Q, šoninės briaunos lygios l. Raskite prizmės tūrį.

Sprendimas. Pjūvio plokštuma prizmę dalija į dvi dalis (314 pav.). Vieną jų lygiagrečiai perkelkime taip, kad sutaptų prizmės pagrindai. Taip gausime naują prizmę, kurios pagrindas bus pradinės prizmės pjūvis, o aukštinė lygi l. Ta prizmė lygiatūrė su pradine prizme. Taigi pradinės prizmės tūris lygus Ql.

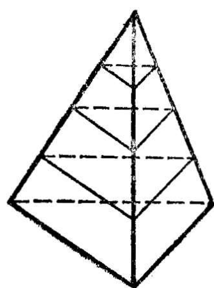
PIRAMIDĖS TŪRIS

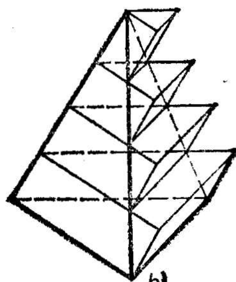
Norint rasti trikampės piramidės tūrį, natūralu būtų bandyti lygiomis piramidėmis papildyti ją iki gretasienio. Kadangi gretasienio tūris jau žinomas, rastume ir piramidės tūrį. Tačiau bendruoju atveju taip padaryti negalima. Todėl darysime kitaip.

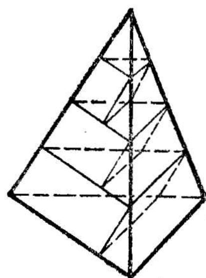
Piramidės aukštinę padalykime į n lygių dalių ir per dalijimo taškus išveskime piramidės pagrindui lygiagrečias plokštumas (315 pav., *a*). Tos plokštumos piramidę padalys į sluoksnius. Kiekvienam sluoksniui sudarykime dvi prizmes: prizmę, kurioje būtų nagrinėjamasis sluoksnis (315 pav., *b*), ir prizmę, kuri būtų tame sluoksnyje (315 pav., *c*).

Piramidės m-tojo sluoksnio, pradedant nuo viršūnės, tūrį pažymėkime V_m. Prizmės, kurioje yra sluoksnis, pagrindas panašus į piramidės pagrindą, todėl jo plotas lygus $S\left(\frac{m}{n}\right)^2$; čia S — piramidės pagrindo plotas. Prizmės aukštinė lygi $\frac{H}{n}$, todėl prizmės tūris lygus $\frac{SHm^2}{n^3}$. Kadangi piramidės sluoksnis yra prizmėje, tai prizmės tūris didesnis už piramidės sluoksnio tūrį. Be to,

$$\frac{(m+1)^3-m^3}{3}=\frac{3m^2+3m+1}{3}>m^2, \text{ kai } m\geqslant 0.$$


a)


b)


c)

315 pav.

C'

Vadinasi,

$$V_m<\frac{SHm^2}{n^3}<\frac{SH}{3n^3}((m+1)^3-m^3),$$

o piramidės tūris

$$V=V_1+V_2+\ldots+V_n<\frac{SH}{3n^3}((n+1)^3-1)=$$

$$=\frac{SH}{3}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-\frac{1}{n^3}\right)<\frac{SH}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3.$$

Kadangi sluoksnyje esančios prizmės tūris mažesnis už sluoksnio tūrį ir

$$\frac{(m-1)^3-(m-2)^3}{3}=\frac{(m-1)^3-((m-1)-1)^3}{3}=$$

$$=(m-1)^2-(m-1)+\frac{1}{3}<(m-1)^2, \text{ kai } m>1,$$

tai, kai $m>1$,

$$V_m>\frac{SH(m-1)^2}{n^3}>\frac{SH}{3n^3}((m-1)^3-(m-2)^3),$$

o piramidės tūris

$$V=V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n>\frac{SH}{3n^3}(n-1)^3=\frac{SH}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^3.$$

Taigi

$$\frac{SH}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^3<V<\frac{SH}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3.$$

Kai n pakankamai didelis, nelygybės dešinioji ir kairioji pusės kiek norima mažai skiriasi nuo $\frac{SH}{3}$, vadinasi, tarp jų esantis dydis V irgi kiek norima mažai skiriasi nuo $\frac{SH}{3}$. Tai galima tik tada, kai $V=\frac{SH}{3}$.

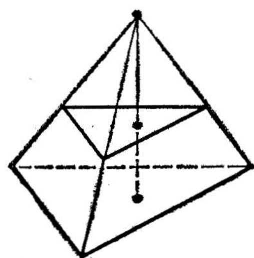
Taigi ***trikampės piramidės tūris lygus vienai trečiajai jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos:***

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

Dabar nagrinėkime bet kokią, o ne trikampę piramidę. Jos pagrindą padalykime į trikampius $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$. Nagrinėjamąją piramidę sudaro piramidės, kurių pagrindai yra tie trikampiai, o viršūnė — nagrinėjamos piramidės viršūnė. Nagrinėjamos piramidės tūris lygus ją sudarančių piramidžių tūrių sumai. Kadangi visų tų piramidžių aukštinė H ta pati, kaip ir nagrinėjamos piramidės, tai nagrinėjamos piramidės tūris

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}SH.$$

Taigi ***piramidės tūris lygus vienai trečiajai jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos.***



316 pav.

Uždavinys (42). Nupjautinės piramidės pagrindų plotai Q_1 ir Q_2 $(Q_1>Q_2)$, aukštinė h. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

Sprendimas. Nupjautinę piramidę papildykime iki pilnosios piramidės (316 pav.). Sakykime, x — jos aukštinė. Nupjautinės piramidės tūris lygus dviejų pilnųjų piramidžių tūrių skirtumui: vienos piramidės pagrindo plotas Q_1, aukštinė x, kitos — pagrindo plotas Q_2, aukštinė $x-h$. Kadangi tos piramidės panašios, tai $\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{x}{x-h}\right)^2$.

Iš čia $x=\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. Nupjautinės piramidės tūris

$$V=\frac{1}{3}\left(Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1}-Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}=\frac{1}{3}h(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2).$$

PANAŠIŲJŲ KŪNŲ TŪRIAI

Sakykime, T ir T' — du paprasti panašūs kūnai. Tai reiškia, kad yra panašumo transformacija, kuri kūną T perveda į kūną T'. Panašumo koeficientą pažymėkime raide k.

Kūną T padalykime į trikampes piramides $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Panašumo transformacija, kuri kūną T perveda į kūną T', piramides $P_1, P_2, \ldots, P_n$ perves į piramides $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Tos piramidės sudarys kūną T', todėl kūno T' tūris lygus piramidžių $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ tūrių sumai.

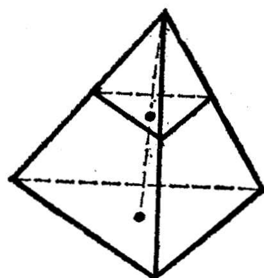
Kadangi piramidės P'_i ir P_i panašios ir panašumo koeficientas k, tai jų aukštinių santykis lygus k, o pagrindų plotų santykis lygus k^2. Vadinasi, piramidžių tūrių santykis lygus k^3. Kadangi kūną T sudaro piramidės P_i, o kūną T' — piramidės P'_i, tai kūnų T' ir T tūrių santykis irgi lygus k^3.

Skaičius k — panašumo koeficientas — yra atstumo tarp taškų, į kuriuos panašumo transformacija perveda bet kuriuos du taškus, santykis su atstumu tarp tų taškų. Vadinasi, tas skaičius yra kūnų T' ir T bet kurių dviejų atitinkamų matmenų santykis. Taigi prieiname tokią išvadą.

Dviejų panašiųjų kūnų tūrių santykis lygus jų atitinkamų matmenų santykio kubui.

Uždavinys (48). Per piramidės aukštinės vidurį išvesta pagrindui lygiagreti plokštuma. Koks piramidės dalių, į kurias ją dalija plokštuma, tūrių santykis?

Sprendimas. Žinome, kad išvestoji plokštuma nuo piramidės nukerta panašią į ją piramidę (317 pav.). Panašumo koeficientas lygus aukštinių santykiui, t. y. $\frac{1}{2}$, todėl piramidžių tūrių santykis yra $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$. Vadinasi, plokštuma piramidę dalija į dalis, kurių tūrių santykis yra $\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7$.


317 pav.

RITINIO IR KŪGIO TŪRIS

Rasime ritinio, kurio pagrindo spindulys R ir aukštinė H, tūrį. Išvedant skritulio ploto formulę (§ 13), buvo nagrinėjami du daugiakampiai: viename buvo nagrinėjamasis skritulys, kitas buvo nagrinėjamame skritulyje, o jų plotai kiek norima mažai skyrėsi nuo skritulio ploto. Tokius daugiakampius sudarykime skrituliui, kuris yra ritinio pagrindas. Sakykime, P — daugiakampis, kuriame yra skritulys, o P' — skritulyje esantis daugiakampis, ir skirtumas tarp tų daugiakampių ploto ir skritulio ploto mažesnis už ε.

Nagrinėkime dvi stačiąsias prizmes, kurių pagrindai yra P ir P', o aukštinė lygi ritinio aukštinei H. Ritinys yra pirmoje prizmėje, todėl tos prizmės tūris didesnis už ritinio tūrį. Antra prizmė yra ritinyje, todėl jos tūris mažesnis už ritinio tūrį.

Pirmos prizmės pagrindo plotas mažesnis už $\pi R^2+\varepsilon$, todėl jos tūris ne didesnis už $(\pi R^2+\varepsilon)H$. Antros prizmės pagrindo plotas didesnis už $\pi R^2-\varepsilon$, o jos tūris ne mažesnis už $(\pi R^2-\varepsilon)H$. Ritinio tūris yra tarp tų prizmių tūrių:

$$H(\pi R^2-\varepsilon)<V<(\pi R^2+\varepsilon)H.$$

Iš čia

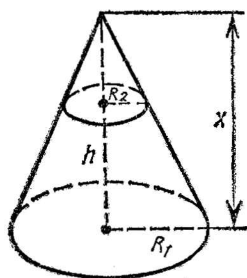
$$-H\varepsilon<V-\pi R^2H<H\varepsilon,$$

t. y. $|V-\pi R^2H|$ yra kiek norima mažas. Kadangi jo reikšmė yra visiškai apibrėžta, tai $V-\pi R^2H=0$. Taigi ***ritinio, kurio pagrindo spindulys R ir aukštinė H, tūris***

$$V=\pi R^2H.$$

Panašiai gautume, kad ***kūgio tūrio formulė yra***

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H;$$



318 pav.

čia R — kūgio pagrindo spindulys, H — kūgio aukštinė. Išvedant formulę, tektų nagrinėti piramides, kurių pagrindai P ir P', o viršūnės sutampa su kūgio viršūne.

Uždavinys (56). Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai R_1 ir R_2 ($R_2<R_1$), aukštinė h. Raskite nupjautinio kūgio tūrį.

Sprendimas. Nupjautinį kūgį papildykime iki pilnojo kūgio (318 pav.). Sakykime, x — jo aukštinė. Nupjautinio kūgio tūris lygus dviejų pilnųjų kūgių tūrių skirtumui: vieno kūgio pagrindo spindulys R_1, aukštinė x, kito — pagrindo spindulys R_2, aukštinė $x-h$.

Kadangi kūgiai panašūs, tai $\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2}$. Iš čia $x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}$. Nupjautinio kūgio tūris

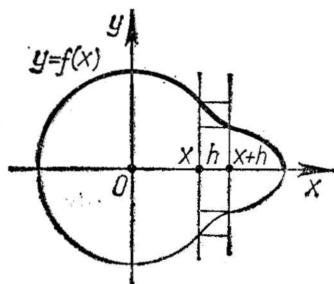
$$V=\frac{1}{3}\left(\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_1R_2+R_2^2).$$

BENDROJI SUKINIO (SUKIMOSI KŪNO) TŪRIO FORMULĖ

Paprasčiausiu *sukiniu (sukimosi kūnu)* vadinamas toks kūnas, kurį, perkirtus tam tikrai tiesei *(sukimosi ašiai)* statmenomis plokštumomis, gaunami pjūviai yra skrituliai, kurių centrai yra toje tiesėje. Apskritasis ritinys, kūgis, rutulys yra sukinių (sukimosi kūnų) pavyzdžiai. Išvesime formulę sukinio (sukimosi kūno) tūriui apskaičiuoti.

Panaudosime dekartines koordinates x, y, z. Ašimi x laikykime kūno ašį. Ašis x yra kūno paviršiaus ir plokštumos xy susikirtimo linijos simetrijos ašis. Sakykime, $y=f(x)$ — virš ašies esančios susikirtimo linijos dalies lygtis (319 pav.).



319 pav.

Per abscisių ašies tašką x išveskime tai ašiai statmeną plokštumą. Kūno dalies, esančios į kairę nuo tos plokštumos, tūrį pažymėkime $V(x)$. Tada $V(x)$ yra x funkcija. Rasime jos išvestinę.

Remiantis išvestinės apibrėžimu,

$$V'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}.$$

Skirtumas $V(x+h)-V(x)$ yra tarp dviejų x ašiai statmenų plokštu-

mų, einančių per taškus, kurių abscisės x ir $x+h$, esančio kūno sluoksnio, kurio storis h, tūris. Sakykime, M — didžiausioji, o m — mažiausioji funkcijos $f(x)$ reikšmė atkarpoje $[x, x+h]$. Tada nagrinėjamame kūno sluoksnyje telpa ritinys, kurio spindulys m ir aukštinė h, o sluoksnis telpa ritinyje, kurio spindulys M ir aukštinė h (žr. 319 pav.), todėl

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

Jei $f(x)$ — tolydžioji funkcija, tai, kai $h \to 0$, kairioji ir dešinioji paskutiniosios nelygybės pusės artėja prie tos pačios ribos $\pi f^2(x)$. Prie tos pačios ribos artėja ir tarp jų esantis santykis, t. y. $V'(x) = \pi f^2(x)$.

Remiantis iš analizės žinoma formule,

$$V(b) - V(a) = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx, \quad a < b.$$

Taikant šią formulę, randamas kūno dalies, esančios tarp lygiagrečių plokštumų $x = a$ ir $x = b$, tūris.

RUTULIO IR JO DALIŲ TŪRIS

Formulę sukinio tūriui apskaičiuoti taikysime rutulio ir jo dalių — rutulio juostos ir rutulio nuopjovos — tūriui apskaičiuoti.

Rutulio nuopjova vadinama ta rutulio dalis, kurią nuo jo nukerta plokštuma. *Rutulio sluoksniu* vadinama rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių rutulį kertančių plokštumų (320 pav.).

Panaudosime dekartines koordinates. Rutulio centrą laikykime koordinačių pradžia. Sakykime, rutulio spindulys R. Plokštumos xy ir rutulio susikirtimo linija yra apskritimas, kurio lygtis

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Virš x ašies esantis pusapskritimis nusakomas lygtimi

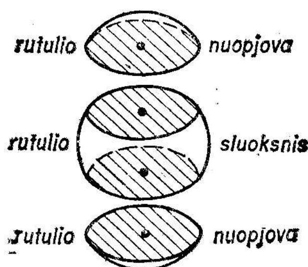
$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leqslant x \leqslant R,$$

todėl rutulio sluoksnio tarp plokštumų $x = a$ ir $x = b$ tūris

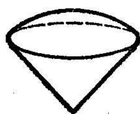
$$V = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b (R^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b =$$

$$= \pi R^2 (b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3).$$



320 pav.

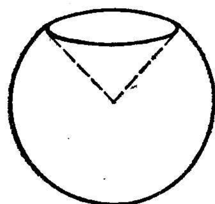


Kai $a=-R$, $b=R$, gauname **viso rutulio tūrį:**

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Norint rasti rutulio nuopjovos, kurios aukštinė H, tūrį, reikia imti $a=R-H$, $b=R$. Gausime, kad ***rutulio nuopjovos tūris***

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$



321 pav.

Rutulio išpjova vadinamas kūnas, kuris iš rutulio nuopjovos gaunamas šitaip. Jei rutulio nuopjova yra mažesnė už pusrutulį, tai rutulio nuopjova papildoma kūgiu, kurio viršūnė yra rutulio centras, o pagrindas yra nuopjovos pagrindas. Jei nuopjova didesnė už pusrutulį, tai minėtas kūgis iš nuopjovos pašalinamas (321 pav.). Taigi rutulio išpjovos tūris gaunamas prie atitinkamos rutulio nuopjovos tūrio pridėjus arba iš jo atėmus kūgio tūrį. ***Rutulio išpjovos tūrio formulė*** yra šitokia:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H;$$

čia R — rutulio spindulys, H — atitinkamos rutulio nuopjovos aukštinė.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Suformuluokite pagrindines tūrio savybes.
2. Įrodykite, kad stačiakampio gretasienio tūris lygus jo matmenų sandaugai.
3. Įrodykite, kad gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.
4. Įrodykite, kad prizmės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.
5. Išveskite trikampės piramidės tūrio formulę.
6. Įrodykite, kad piramidės tūris lygus vienai trečiajai jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos.
7. Įrodykite, kad panašiųjų kūnų tūrių santykis lygus jų atitinkamų matmenų santykio kubui.
8. Išveskite ritinio (kūgio) tūrio formulę.
9. Išveskite bendrą sukinio tūrio formulę.
10. Kas yra rutulio nuopjova, rutulio sluoksnis, rutulio išpjova?
11. Išveskite rutulio, rutulio nuopjovos, rutulio išpjovos tūrio formules.

PRATIMAI

1. Iš trijų žalvario kubų, kurių briaunos 3 cm, 4 cm ir 5 cm, sulydytas vienas kubas. Raskite to kubo briaunos ilgį.
2. Metalinio kubo išorinė briauna yra 10,2 cm, masė 514,15 g. Sienelių storis lygus 0,1 cm. Raskite tankį metalo, iš kurio padarytas kubas.
3. Kiekvieną kubo briauną padidinus 2 cm, gauto kubo tūris 98 cm^3 didesnis už pradinio kubo tūrį. Apskaičiuokite pradinio kubo briauną.
4. Kiekvieną kubo briauną padidinus 1 m, gauto kubo tūris 125 kartus didesnis už pradinio kubo tūrį. Raskite pradinio kubo briauną.
5. Plytos matmenys $25\times12\times6{,}5$ cm, masė 3,51 kg. Koks plytos tankis?
6. Reikia įrengti 10 m^3 talpos rezervuarą vandeniui. Rezervuaro dugnas — $2{,}5\times1{,}75$ m aikštelė. Apskaičiuokite rezervuaro aukštį.
7. Stačiakampio gretasienio matmenys 15 m, 50 m ir 36 m. Raskite lygiatūrio su juo kubo briauną.
8. Stačiakampio tašelio matmenys 3 cm, 4 cm, 5 cm. Tašelio, kurio kiekviena briauna x cm ilgesnė, paviršius 54 cm^2 didesnis. Kiek didesnis to tašelio tūris?
9. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės a ir b, kampas tarp jų 30°, šoninis paviršius lygus S. Raskite gretasienio tūrį.
10. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės $2\sqrt{2}$ cm ir 5 cm, kampas tarp jų 45°. Mažesnioji gretasienio įstrižainė lygi 7 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.
11. Stačiojo gretasienio pagrindas — rombas, kurio plotas 1 m^2. Įstrižinių pjūvių plotai 3 m^2 ir 6 m^2. Raskite gretasienio tūrį.
12. Išspręskite 11 uždavinį, kai rombo plotas Q, įstrižinių pjūvių plotai M ir N.
13. Pasvirojo gretasienio pagrindas — kvadratas, kurio kraštinė lygi 1 m. Viena šoninė briauna lygi 2 m ir su kiekviena prie jos esančia pagrindo kraštine sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.
14. Gretasienio sienos — lygūs rombai, kurių kraštinė a ir smailusis kampas 60°. Raskite gretasienio tūrį.
15. Taisyklingosios prizmės pagrindo kraštinė a, šoninė briauna b. Raskite prizmės tūrį, kai prizmė: 1) trikampė; 2) keturkampė, 3) šešiakampė.
16. Medinė plokštelė yra taisyklingojo aštuoniakampio formos. Plokštelės kraštinė 3,2 cm, storis 0,7 cm, masė 17,3 g. Raskite medžio tankį.
17. Ketaus vamzdžio, kurio skerspjūvis — kvadratas, išorinis plotis 25 cm, sienelių storis 3 cm. Kokia vieno metro ilgio vamzdžio masė? (Ketaus tankis 7,3 g/cm^3.)

18. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė lygi 3,5 cm, o šoninės sienos įstrižainė 2,5 cm. Apskaičiuokite prizmės tūrį.
19. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a, šoninis paviršius lygus pagrindų plotų sumai. Raskite prizmės tūrį.
20. Taisyklingosios šešiakampės prizmės didžiausio įstrižinio pjūvio plotas 4 m^2, o atstumas tarp dviejų priešingų šoninių sienų 2 m. Apskaičiuokite prizmės tūrį.
21. Pasvirosios prizmės pjūvio, statmeno šoninėms briaunoms ir kertančio visas šonines briaunas, plotas Q, šoninės briaunos lygios l. Raskite prizmės tūrį.
22. Pasvirosios trikampės prizmės šoninės briaunos lygios 15 m, o atstumai tarp lygiagrečių tiesių, einančių per prizmės šonines briaunas, lygūs 26 m, 25 m ir 17 m. Apskaičiuokite prizmės tūrį.
23. Lietvamzdžio skerspjūvis yra lygiašonio trikampio formos; jo pagrindas 1,4 m, aukštinė 1,2 m. Vandens tėkmės greitis 2 m/s. Kiek kubinių metrų vandens prateka juo per 1 h?
24. Geležinkelio pylimo pjūvis yra trapecijos formos; jos apatinis pagrindas 14 m, viršutinis pagrindas 8 m, aukštis 3,2 m. Kiek kubinių metrų žemės tenka 1 km pylimo?
25. Stačiosios trikampės prizmės pagrindų kraštinės lygios 4 cm, 5 cm ir 7 cm, o šoninė briauna lygi didžiausiai pagrindo aukštinei. Apskaičiuokite prizmės tūrį.
26. Stačiosios trikampės prizmės pagrindo plotas lygus 4 cm^2, o šoninių sienų plotai 9 cm^2, 10 cm^2 ir 17 cm^2. Apskaičiuokite prizmės tūrį.
27. Prizmės pagrindas — trikampis, kurio viena kraštinė lygi 2 cm, o kitos dvi — po 3 cm. Šoninė briauna lygi 4 cm ir su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Raskite lygiatūrio su prizme kubo briauną.
28. Pasvirosios prizmės pagrindas yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė a; pagrindui statmena šoninė siena yra rombas. Jo mažesnioji įstrižainė lygi c. Raskite prizmės tūrį.
29. Stačiakampio gretasienio įstrižainė a su pagrindo plokštuma sudaro kampą α, o su šonine siena — kampą β. Koks to gretasienio tūris?
30. Kiekviena gretasienio briauna lygi 1 cm. Visi trys plokštieji kampai prie vienos gretasienio viršūnės — smailieji, kiekvienas jų lygus 2α. Raskite gretasienio tūrį.
31. Gretasienio trijų briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, ilgiai a, b, c. Briaunos a ir b viena kitai statmenos, o briauna c su kiekviena jų sudaro kampą α. Raskite gretasienio tūrį.
32. Stačiosios keturkampės prizmės aukštinė h, įstrižainės pasvirusios į pagrindo plokštumą kampais α ir β, o smailusis kampas tarp pagrindo įstrižainių lygus γ. Raskite prizmės tūrį.
33. Taisyklingosios piramidės pagrindo kraštinė a, šoninė briauna b. Raskite piramidės tūrį, kai piramidė: 1) trikampė; 2) keturkampė; 3) šešiakampė.

34. Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo kraštinė a, o dvisienis kampas prie pagrindo lygus 45°. Raskite piramidės tūrį.
35. Trikampės piramidės šoninės briaunos viena kitai statmenos, kiekviena jų lygi b. Raskite piramidės tūrį.
36. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė a, o šoninės briaunos viena kitai statmenos. Raskite piramidės tūrį.
37. Taisyklingojo tetraedro briauna lygi a. Raskite jo tūrį.
38. Oktaedro briauna lygi a. Raskite jo tūrį.
39. Piramidės pagrindas — stačiakampis, kurio kraštinės 9 m ir 12 m; visos šoninės briaunos lygios 21,5 m. Raskite piramidės tūrį.
40. Piramidės pagrindas — lygiašonis trikampis, kurio kraštinės 6 cm, 6 cm ir 8 cm. Visos šoninės briaunos lygios 9 cm. Raskite piramidės tūrį.
41. Viena trikampės piramidės briauna lygi 4 cm, kiekviena kita briauna — 3 cm. Raskite piramidės tūrį.
42. Nupjautinės piramidės pagrindų plotai Q_1 ir Q_2 ($Q_1>Q_2$), aukštinė h. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.
43. Piramidės pagrindo plotas Q_1. Pagrindui lygiagretaus pjūvio, kurio atstumas nuo pagrindo h, plotas Q_2. Raskite piramidės aukštinę.
44. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės apatinio ir viršutinio pagrindų kraštinės lygios a ir b, o dvisienis kampas prie apatinio pagrindo briaunos lygus α. Raskite piramidės tūrį.
45. Išspręskite panašų į 44 uždavinį taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės atveju.
46. Piramidės pagrindas — stačiakampis. Kiekviena piramidės šoninė briauna lygi l ir su gretimomis stačiakampio kraštinėmis sudaro kampus α ir β. Raskite piramidės tūrį.
47. Piramidės pagrindas — trikampis, kurio du kampai α ir β, o apibrėžto apie jį skritulio spindulys R. Piramidės šoninės briaunos pasvirusios į jos pagrindo plokštumą kampu γ. Raskite piramidės tūrį.
48. Per piramidės aukštinės vidurį išvesta pagrindui lygiagreti plokštuma. Koks piramidės dalių, į kurias ją dalija plokštuma, tūrių santykis?
49. Piramidės aukštinė h. Koks piramidės pagrindui lygiagretaus pjūvio, dalijančio piramidę į dvi lygiatūres dalis, atstumas nuo piramidės viršūnės?
50. Varinio laido ilgis 25 m, masė 100,7 g. Raskite laido skersmenį. (Vario tankis 8,94 g/cm^3.)
51. Siurblys pumpuoja vandenį į garo katilą dviem vandens cilindrais. Cilindrų skersmuo 80 mm, o stūmoklio eiga 150 mm. Kiekvienas stūmoklis per minutę daro 50 darbo eigų. Kiek litrų vandens pripumpuoja siurblys per valandą?

52. Kiek kartų reikia padidinti ritinio aukštinę, nepakeitus pagrindo, kad tūris padidėtų n kartų? Kiek kartų reikia padidinti ritinio pagrindo spindulį, nepakeitus aukštinės, kad tūris padidėtų n kartų?

53. Į ritinį įbrėžta taisyklingoji trikampė prizmė, o į prizmę įbrėžtas ritinys. Raskite ritinių tūrių santykį.

54. Į taisyklingąją šešiakampę prizmę, kurios kiekviena briauna lygi a, įbrėžtas ritinys. Raskite ritinio tūrį.

55. Švininio vamzdžio sienelių storis 4 mm, vidinis skersmuo yra 13 mm, ilgis 25 m. Kokia to vamzdžio masė? (Švino tankis 11,4 g/cm^3.)

56. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai R_1 ir R_2 ($R_2<R_1$), aukštinė h. Raskite nupjautinio kūgio tūrį.

57. Pušinio rąsto ilgis 15,5 m; jo galų skersmenys 42 cm ir 25 cm. Apskaičiuokite paklaidą (procentais), kai rąsto tūriu laikoma jo viduriniojo pjūvio ploto ir ilgio sandauga.

58. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai R ir r; sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Raskite tūrį.

59. Nupjautinio kūgio ašinio pjūvio plotas lygus pagrindų plotų skirtumui, o pagrindų spinduliai R ir r. Raskite kūgio tūrį.

60. Iš nupjautinio kūgio, kurio pagrindų spinduliai 4 cm ir 22 cm, reikia padaryti to paties aukščio lygiatūrį su juo ritinį. Koks to ritinio pagrindo spindulys?

61. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai R ir r. Raskite nupjautinio kūgio ir atitinkamo pilnojo kūgio tūrių santykį.

62. Kūgiškos krūvos pagrindo spindulys 2 m, o sudaromoji 3,5 m. Raskite krūvos tūrį.

63. Kūgio ašinis pjūvis yra statusis lygiašonis trikampis, kurio plotas 9 m^2. Raskite kūgio tūrį.

64. Kūgio sudaromosios ilgis l, o pagrindo apskritimo ilgis c. Raskite kūgio tūrį.

65. Kūgio sudaromoji l su pagrindo plokštuma sudaro kampą α. Raskite kūgio tūrį.

66. Šieno kupeta yra ritinio su kūgišku viršumi formos. Jos pagrindo spindulys 2,5 m, aukštis 4 m, o ritiniška kupetos dalis yra 2,2 m aukščio. Raskite šieno kupetos masę. (Šieno tankis 0,03 g/cm^3.)

67. Skystis iš kūgiško 0,18 m aukščio ir 0,24 m pagrindo skersmens indo perpiltas į ritinio formos indą, kurio pagrindo skersmuo 0,1 m. Koks skysčio aukštis antrame inde?

68. Lygiakraštis trikampis sukamas apie jo kraštinę a. Raskite gauto sukinio tūrį.

69. Statusis trikampis, kurio statiniai a ir b, sukamas apie įžambinę. Raskite gauto kūno tūrį.

70. Ketinio reguliatoriaus rutulio masė 10 kg. Raskite rutulio skersmenį. (Ketaus tankis 7,2 g/cm^3.)

71. Iš dviejų ketinių rutulių, kurių skersmenys 25 cm ir 35 cm, reikia sulydyti vieną rutulį. Raskite naujo rutulio skersmenį.

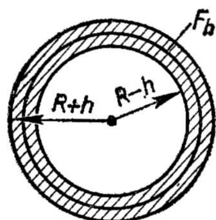
72. Kiek 1 cm skersmens rutuliukų galima nulieti iš 1 kg masės švino gabalo? (Švino tankis 11,4 g/cm^3.)
73. Iš medinio ritinio, kurio aukštis lygus pagrindo skersmeniui, ištekintas didžiausias galimas rutulys. Kiek procentų medžio nutekinta?
74. Tuščiavidurio rutulio išorinis skersmuo 18 cm. Sienelių storis 3 cm. Raskite medžiagos, iš kurios padarytas rutulys, tūrį.
75. Indas yra pusrutulio, papildyto ritiniu, formos. Pusrutulio spindulys R. Koks turi būti cilindrinės dalies aukštis, kad indo tūris būtų V?
76. Rutulio skersmeniui statmena plokštuma dalija skersmenį į 3 cm ir 9 cm dalis. Koks atitinkamų rutulio dalių tūris?
77. Kokią rutulio tūrio dalį sudaro rutulio nuopjovos, kurios aukštinė lygi 0,1 rutulio skersmens, tūris?
78. Kiekvieno iš dviejų lygių rutulių centras yra kito rutulio paviršiuje. Koks rutulių bendrosios dalies tūrio ir vieno rutulio tūrio santykis?
79. Rutulio skersmuo, lygus 30 cm, yra ritinio ašis; ritinio pagrindo spindulys lygus 12 cm. Raskite ritinio viduje esančios rutulio dalies tūrį.
80. Rutulio išpjovos pagrindo apskritimo spindulys lygus 60 cm, o rutulio spindulys lygus 75 cm. Koks rutulio išpjovos tūris?
81. Skritulio išpjova, kurios kampas 30° ir spindulys R, sukama apie vieną jos krašto spindulį. Raskite gauto kūno tūrį.

§ 21. KŪNŲ PAVIRŠIŲ PLOTAI

PAVIRŠIAUS PLOTO SĄVOKA

Išnagrinėkime tokį praktinį uždavinį. Įsivaizduokime pastato kupolą ir plokščią kvadratinį skardos lakštą, kurio kraštinė 1 m. Sakykime, pastato kupolas ir skardos lakštas dažomi. Jei kupolui nudažyti reikia V_1 l dažų, o skardos lakštui nudažyti — V_2 l dažų, tai natūralu laikyti, kad pastato kupolo plotas $\frac{V_1}{V_2}$ kartų didesnis už skardos lakšto plotą. Dydis $\frac{V_1}{V_2}$ apibūdina kupolo paviršiaus ploto didumą, lyginant jį su pasirinktu ploto vienetu (1 m^2). Dažų, kurių reikia skardos lakštui nudažyti, kiekis V_2 apytiksliai lygus gretasienio, kurio pagrindas yra 1×1 m kvadratas, o aukštinė h lygi dažų sluoksnio storiui, tūriui. Vadinasi, kupolo paviršiaus plotą įvertiname dydžiu $\frac{V_1}{h}$.

Dabar paviršiaus plotą apibrėšime geometriškai. Sakykime, F — nagrinėjamasis paviršius. Sudarykite kūną F_h iš visų tų erdvės taškų, kurių kiekvienam yra paviršiaus F taškas, nuo jo



322 pav.

nutolęs atstumu, ne didesniu už h. Vaizdžiai kūną F_h galima įsivaizduoti kaip kūną, kurį sudarytų dažai, paviršių F dažant iš abiejų pusių, kai dažų sluoksnio storis h.

Sakykime, V_h — kūno F_h tūris. *Paviršiaus F plotu* vadinsime santykio $\frac{V_h}{2h}$ ribą, kai $h \to 0$, t. y.

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

Galima įrodyti, kad paprasčiausių iškilųjų paviršių — prizmės bei piramidės šoninio paviršiaus — atveju iš pateiktojo apibrėžimo gautume tą pačią, kaip ir anksčiau, paviršiaus ploto reikšmę — šoninių sienų plotų sumą.

SFEROS PLOTAS

Rasime sferos plotą. Sakykime, F — nagrinėjamoji sfera, R — jos spindulys. Kūnas F_h, apie kurį kalbama paviršiaus ploto apibrėžime, yra sluoksnis tarp dviejų koncentrinių sferų, kurių spinduliai $R+h$ ir $R-h$ (322 pav.). To kūno tūris lygus rutulių, kurių spinduliai $R+h$ ir $R-h$, tūrių skirtumui, t. y.

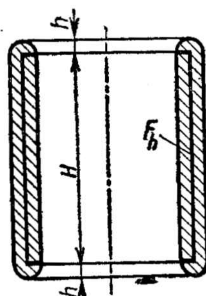
$$V_h = \frac{4}{3}\pi((R+h)^3 - (R-h)^3).$$

Tada

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h}(6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

Kai $h \to 0$, santykis $\frac{V_h}{2h}$ artėja prie ribos $4\pi R^2$. Taigi ***sferos, kurios spindulys R, plotas lygus $4\pi R^2$.***

RITINIO ŠONINIS PAVIRŠIUS



323 pav.

Rasime ritinio, kurio spindulys R ir aukštinė H, šoninio paviršiaus plotą. Šiuo atveju kūnas F_h (minimas paviršiaus ploto apibrėžime) yra kūne, apribotame dviejų cilindrinių paviršių, kurių spinduliai $R+h$ ir $R-h$, ir dviejų ritinio ašiai statmenų plokštumų, nutolusių viena nuo kitos atstumu $H+2h$ (323 pav.); cilindrinių paviršių ribojamo sluoksnio dalis, esanti tarp ritinio pagrindų plokštumų, telpa kūne F_h, todėl

$$V_h < (\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2)(H+2h),$$
$$V_h > (\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2)H,$$

arba

$$4\pi RhH < V_h < 4\pi Rh(H+2h).$$

Iš čia

$$2\pi RH < \frac{V_h}{2h} < 2\pi RH + 4\pi Rh.$$

Kai $h \to 0$, nelygybės dešinioji pusė artėja prie $2\pi RH$. Vadinasi,

$$\lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h} = 2\pi RH.$$

Taigi ***ritinio šoninio paviršiaus ploto formulė yra***

$$S = 2\pi RH,$$

R — ritinio spindulys, H — aukštinė.

Panašiai galima gauti kūgio šoninio paviršiaus bei sferos nuopjovos ploto formules.

Kūgio šoninio paviršiaus plotas

$$S = \pi Rl,$$

R — kūgio pagrindo spindulys, l — sudaromosios ilgis.

Sferos nuopjovos plotas

$$S = 2\pi RH,$$

R — sferos spindulys, H — nuopjovos aukštinė.

KARTOJIMO KLAUSIMAI

1. Kas yra kūno paviršiaus plotas?
2. Išveskite rutulio paviršiaus ploto formulę.
3. Kokia formulė taikoma rutulio nuopjovos paviršiaus plotui apskaičiuoti?
4. Išveskite ritinio šoninio paviršiaus formulę.
5. Kokia formulė taikoma kūgio šoninio paviršiaus plotui apskaičiuoti?

PRATIMAI

1. Dviejų rutulių paviršių santykis yra $m : n$. Koks jų tūrių santykis?
2. Įžambinė ir statiniai yra trijų rutulių skersmenys. Kaip susiję tų rutulių paviršiai?
3. Cilindrinio kamino skersmuo 65 cm, aukštis 18 m. Kiek skardos reikia kaminui pagaminti? (Kniedijimui išeina 10% skardos.)
4. Pusritinio formos rūsio skliautas yra 6 m ilgio ir 5,8 m skersmens. Raskite rūsio visą paviršių.

5. Iš apskrito metalo lakšto išštampuota cilindrinė gilzė, kurios skersmuo 25 cm, aukštis 50 cm. Tarę, kad lakšto plotas štampuojant nekinta, raskite lakšto skersmenį.
6. Ritinio pagrindo plotas lygus Q, ašinio pjūvio plotas M. Raskite visą paviršių.
7. Kūgiškos palapinės, kurios aukštis 3,5 m ir pagrindo skersmuo 4 m, šoninis paviršius padengtas kiltu. Kiek kvadratinių metrų kilto sunaudota?
8. Siloso bokštas yra kūgiškas. Bokšto stogo aukštis 2 m, skersmuo 6 m. Raskite stogo paviršių.
9. Kūgio pagrindo plotas S, o sudaromosios pasvirusios į pagrindą kampu α. Raskite kūgio šoninį paviršių.
10. Koks yra lygiakraščio kūgio (jo ašinis pjūvis — taisyklingasis trikampis) šoninio ir viso paviršiaus santykis?
11. Iš pusskritulio padarytas kūginis paviršius. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir ašies.
12. Skritulio išpjovos spindulys lygus 3 m, kampas 120°. Išpjova susukta į kūginį paviršių. Raskite kūgio pagrindo spindulį.
13. Iš žalvario lakšto norima padaryti ruporą, kurio vieno galo skersmuo 0,43 m, kito — 0,036 m ir sudaromoji — 1,42 m. Koks turi būti lakšto plotas?
14. Kūgiško kibiro skersmenys 25 cm ir 30 cm, sudaromoji 27,5 cm. 1 m^2 nudažyti reikia 150 g pokosto. Kiek pokosto reikia 100 kibirų išorei nudažyti?
15. Lygiakraščio kūgio visas paviršius lygiaplotis su rutulio, kurio skersmuo lygus kūgio aukštinei, paviršiumi. Įrodykite.
16. Kūno, kuris, gaunamas kvadratą sukant apie kraštinę, paviršius lygiaplotis su rutulio, kurio spindulys lygus kvadrato kraštinei, paviršiumi. Įrodykite.
17. Rutulio spindulys 15 cm. Koks yra rutulio paviršiaus dalies, matomos iš taško, nuo rutulio centro nutolusio 25 cm atstumu, plotas?
18. Rutulio spindulys 10 cm. Išilgai ašies išgręžta 12 cm skersmens cilindriška anga. Raskite kūno visą paviršių.

PRATIMŲ ATSAKYMAI IR NURODYMAI

§ 1.

7. Ne daugiau kaip vieną. **10.** 1), 4), 6) Kerta; 2), 3), 5) nekerta. **11.** 6 atkarpos. **14.** 1) 6 cm; 2) 7,7 dm; 3) 18,1 m. **17.** 1), 2) Nepriklauso; 3) priklauso. **18.** 1), 2) Negali. **19.** Negali. **20.** Negali. **21.** Negali. **22.** 0,5 m arba 5,9 m. **23.** Atkarpa AB. **24.** Negali. **25.** 1) $AC=9$ m, $BC=6$ m; 2) $AC=10$ m, $BC=5$ m; 3) $AC=BC=7{,}5$ m; 4) $AC=6$ m, $BC=9$ m. **27.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **28.** 2), 3) Negali. **29.** Kampas (ab) didesnis. **30.** 1) $\angle(ac)=45°$, $\angle(bc)=15°$; 2) $\angle(ac)=40°$, $\angle(bc)=20°$; 3) $\angle(ac)=\angle(bc)=30°$; 4) $\angle(ac)=24°$, $\angle(bc)=36°$. **33.** Nėra. **34.** Vienas. **36.** 1) 1,2 m; 2) 2,4 cm. **38.** 11 cm. **39.** 100°. **41.** $PQ=5$ cm, $QR=6$ cm, $PR=7$ cm. **42.** $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. **44.** $AB=5$ cm, $BC=6$ cm, $AC=7$ cm. **46.** Negalima. **47.** Negali.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Negali; 3) gali. **4.** 1) 105° ir 75°; 2) 110° ir 70°; 3) 45° ir 135°. **5.** 1) 72° ir 108°; 2) 54° ir 126°; 3) 55° ir 125°; 4) 88° ir 92°. **6.** 150°, 150°, 30°. **7.** 130°. **9.** 144° ir 36°. **10.** 65° ir 115°. **11.** Visi kampai statūs. **13.** 1) Ne; 2) ne. **14.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **15.** $\angle(a_1b)=120°$, $\angle(a_1c)=150°$, $\angle(bc)=30°$. **17.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°. **18.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **19.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **21.** N u r o d y m a s. Remkitės 20 uždavinio rezultatu ir 2.3 teorema. **22.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **23.** 2) N u r o d y m a s. Taškus A ir C sujunkite atkarpa ir remkitės 23 uždavinio 1) teiginiu.

§ 3.

10. 0,3 m. **11.** 3,5 m. **12.** 1) 3,2 m, 6,2 m, 6,2 m; 2) 7,2 m, 4,2 m, 4,2 m. **21.** N u r o d y m a s. Remkitės lygiašonio trikampio pusiaukraštinės savybe. **25.** 15 m. **26.** 15 m. **29.** N u r o d y m a s. Remkitės 28 uždavinio teiginiu. **38.** N u r o d y m a s. Pratęskite pusiaukraštinę per jos ilgį. **40.** N u r o d y m a s. Pratęskite pusiaukraštinę per jos ilgį.

§ 4.

2. Kampai AB_1C_1 ir AC_1B_1 bei kampai BB_1C_1 ir CC_1B_1 yra vidaus vienašaliai, o kampai AB_1C_1 ir CC_1B_1 bei kampai BB_1C_1 ir AC_1B_1 yra vidaus priešiniai. **8.** 105° ir 75°. **9.** 75°. **10.** Trys kampai po 72° ir keturi kampai po 108°. **11.** Negali. **13.** 90°. **14.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **15.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **16.** Negali. **17.** Negali. **18.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **19.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **20.** 40°, 40°. **21.** 70° ir 40° arba 55° ir 55°. **22.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) Du kampai lygūs $120° - \frac{2}{3}\alpha$, o vienas $\frac{4}{3}\alpha - 60°$. **24.** 1) 105°; 2) $180° - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; 3) 155°; 4) $90° + \frac{\gamma}{2}$. **25.** 110°, 35°, 35°. **26.** 60°, 30° ir 90°. **27.** 110°. **29.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **30.** Trikampio ABD kampai: $\angle A=\alpha$, $\angle D=90°$, $\angle B=90°-\alpha$; trikampio CBD kampai: $\angle D=90°$, $\angle B=\alpha+\beta-90°$, $\angle C=180°-\alpha-\beta$. **32.** 60°. **33.** $\angle D=\frac{1}{2}\angle A$, $\angle E=\frac{1}{2}\angle C$, $\angle DBE=\angle B+\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$. **34.** 140°, 10°. **36.** 90°, 45°, 45°. **37.** $\angle D=90°$, $\angle B=60°$, $\angle A=30°$. **38.** 150°. **39.** 90°.

§ 5.

1. Nurodymas. Nukirskite nuo spindulio atkarpą, lygią apskritimo spinduliui. 2. Žr. 1 uždavinį. 5. 60°. 6. 120°. 7. Negali. 9. 30°. 10. 60° ir 120°. 11. 70 cm, 10 cm. 12. Ne. 13. 1) Negali; 2) negali. 25. Nurodymas. Pirma nubraižykite lygiakraštį trikampį. 27. Nurodymas. Ieškomojo trikampio pusiaukraštinę pratęskite per jos ilgį. 32. Nurodymas. Pirma nubraižykite aukštinę. 36. Žr. § 4, 42 uždavinį. 37. Žr. 36 uždavinį. 45. Nurodymas. Ieškomojo apskritimo centras yra kampo pusiaukampinėje. 46. 10 cm. 47. 5 cm. 50. Žr. 49 uždavinį. 52. α arba $180°-\alpha$. 53. 50°. 54. Nurodymas. 1) Lietimosi taškas, duotasis taškas ir apskritimo centras yra stačiojo trikampio viršūnės. 2) Spręsdami uždavinį, remkitės ankstesnio uždavinio sprendimu, nubrėžę pagalbinį apskritimą, koncentrinį su vienu iš duotųjų apskritimų. To apskritimo spindulys lygus duotųjų apskritimų spindulių sumai arba skirtumui. 59. Nurodymas. Remkitės įbrėžtinių kampų savybe.

§ 6.

3. Tris. 4. 10 m. 5. 3 cm. 7. $BC=AD=4{,}8$ m. 8. 40°, 140°, 140°. 9. 115° ir 65°. 10. Negali. 11. 60°, 60°, 120°, 120°. 12. 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. 13. 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. 16. $BE=9$ cm, $CE=6$ cm. Nurodymas. Įrodykite, kad trikampis ABE yra lygiašonis, AE — jo pagrindas. 17. 0,6 m ir 0,8 m. 18. $AB=BD=1{,}1$ m, $AD=0{,}8$ m. 23. 60 cm. 24. 10 cm ir 18 cm. 25. 12 cm, 20 cm. 26. 12 cm. 27. 10 cm ir 25 cm arba 7,5 cm ir 18,75 cm. 30. 80° ir 100°. 32. 60° ir 120°. 35. 4 m. 37. 2 m. 38. 2 m. 39. 4 m, 8 m. 40. 1 m. 41. 10 cm. 42. 4 cm, 5 cm, 6 cm. 43. 6 cm. 44. 6 cm, 5 cm, 5 cm. 48. 5 m, 6 m. 49. $a+b$. 52. 3 m, 4 m. 54. 70° ir 110°. 55. 1,7 m. 56. 24 cm, 36 cm. 57. 60° ir 120°. 58. 15 m. 59. 3 cm. 61. 4 m, 6 m. 62. 2,2 m. 63. 9 cm ir 5 cm. 64. a. 65. Nurodymas. Pirma nubraižykite trikampį, kurio dvi kraštinės lygios trapecijos šoninėms kraštinėms, o trečioji — pagrindų skirtumui. 66. Nurodymas. Pirma nubraižykite trikampį, kurio dvi kraštinės lygios trapecijos įstrižainėms, o trečioji — pagrindų sumai.

§ 7.

3. 5 m arba $\sqrt{7}$ m. 4. 1) 5 cm; 2) 17 dm; 3) 6,5 m. 5. 109 cm. 6. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 7. Negalima. 8. $\frac{25}{3}$, $\frac{29}{3}$. 9. 1) 15 cm, 20 cm; 2) 60 m, 80 m. 11. Nurodymas. Ieškomoji atkarpa yra stačiojo trikampio aukštinė, kurios pagrindas dalija įžambinę į atkarpas a ir b. 12. $\sqrt{116}$ m $\approx 10{,}8$ m. 13. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. 14. 32 cm, 60 cm. 15. 15 cm. 17. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 18. 24 cm. 19. 36 cm, 54 cm. 20. 25 cm arba 11 cm. 22. 1) 24 cm; 2) 24 cm. 23. 12 cm, 11,2 cm, $\frac{168}{13}$ cm. 24. 13,44 cm. 25. 2) Negalima. 26. 10 cm, 6 cm. 27. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. 28. $R=\frac{169}{24}$ cm, $r=\frac{10}{3}$ cm. 29. $90°-\alpha$, $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$. 30. $90°-\alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$. 33. 1) $\sin 16°=0{,}2756$, $\cos 16°=0{,}9613$; 2) $\sin 24°36'=0{,}4163$, $\cos 24°36'=0{,}9092$; 3) $\sin 70°32'=0{,}9428$, $\cos 70°32'=0{,}3333$; 4) $\sin 88°49'=0{,}9998$, $\cos 88°49'=0{,}0206$. 34. 1) $x=1°$; 2) $x=30°6'$; 3) $x=47°3'$; 4) $x=86°9'$. 35. 1) $\operatorname{tg} 10°=0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg} 40°40'=0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg} 50°30'=1{,}213$; 4) $\operatorname{tg} 70°15'=2{,}785$. 36. 1) $x=17°53'$; 2) $x=38°7'$; 3) $x=$

$=80°46'$; 4) $x=83°50'$. **37.** 31°25'; 31°25'; 117°10'; 23,8 cm. **38.** 34°10' ir 55°50'. **39.** 51°. **40.** 116°16' ir 63°44'. **41.** 29°52' ir 150°8'. **42.** 12 m, 45°14'. **43.** 60°16'. **44.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **45.** 1) a) 5; 36°52'; 53°8'; b) 41; 12°41'; 77°19'; c) 29; 43°36'; 46°24'; d) 61; 10°23'; 79°37'. 2) a) 12; 22°37'; 67°23'; b) 24; 16°16'; 73°44'; c) 15; 28°4'; 61°56'; d) 13; 81°12'; 8°48'. 3) a) 70°; 0,68; 1,88; b) 39°40'; 3,08; 2,55; c) 19°24'; 7,55; 2,66; d) 13°39'; 15,55; 3,78. 4) a) 59°33'; 5,92; 5,10; b) 49°12'; 7,65; 5,79; c) 29°25'; 8,04; 3,95; d) 22°; 9,71; 3,64. **46.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3\alpha$; 5) 1; 6) $\sin^2\alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2\alpha$; 9) $1+\mathrm{tg}^6\alpha$. **47.** 1) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$. **48.** 1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=\frac{9}{41}$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{40}{9}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$. **50.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **51.** $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. **52.** 29 cm. **53.** $(\sqrt{3}-1)$ m$\approx$0,732 m, $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ m$\approx$0,517 m. **54.** 60° ir 120°. **55.** 60°, 60°, 120°, 120°. **56.** 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **57.** BC. **58.** $\angle A$. **59.** 3 m. **62.** Negali. **63.** 2 m. **67.** Atkarpų AB ir CD susikirtimo taškas. **68.** Negali. **71.** $R-d$, $R+d$. Nurodymas. Remkitės trikampio nelygybe. **72.** $d+R$, $d-R$. Nurodymas. Remkitės trikampio nelygybe. **73.** Negali. **74.** Negali. **75.** Nurodymas. Palyginkite atstumą tarp apskritimų centrų su jų spinduliais. **76.** Ne.

§ 8.

3. 2. **4.** 3. **5.** (2, 0). **6.** (0, 3). **7.** Tiesė, lygiagreti y ašiai. **8.** Dvi tiesės $x=3$ ir $x=-3$. **10.** Teigiamąjį. **11.** 1) 4; 2) 3. **12.** 5. **13.** $x=2$. **14.** $x=-2$. **15.** Tiesė, sudaryta iš I ir III ketvirčio pusiaukampinių. **16.** Tiesė, sudaryta iš II ir IV ketvirčio pusiaukampinių. **18.** (0, −2). **19.** (1, 1). **20.** (3, 3). **23.** 1) 2; 2) 4. **25.** $AB=5$, $AC=10$, $BC=5$. **26.** Taškas B. **28.** (3, 3) ir (15, 15). **29.** (3, 4). (−4, 3), (0, 5). **30.** (5, 12) ir (5, −12); (5, −12) ir (−5, −12). **31.** $x^2+(y-3)^2=13$. **32.** $(x+4)^2+(y-3)^2=25$. **34.** Žr. 33 uždavinį. **35.** 1), 3), 4) Negalima; 2) galima. **36.** (−2, 0) arba (4, 0). **37.** (7, 0) ir (1, 0). **38.** (2, 2) ir (−2, −2). **39.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **40.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **43.** $x+y=2$. **44.** 1) (−3, 0), (0, −1,5); 2) (4, 0), (0, 3); 3) (−2, 0), (0, 3;) 4) 2,5; 0), (0, −5). **45.** (−1, 1), (3, −2). **46.** 1) (1, −2); 2) (2, 4); 3) (0,5; −2). **48.** 1) $x+y=5$; 2) $3x+10y=2$; 3) $x+6y=-13$. **49.** $a=b=\frac{1}{3}$. **50.** −3. **51.** $\pm\sqrt{12}$. **52.** Nurodymas. Raskite dviejų tiesių susikirtimo tašką ir patikrinkite, ar jis priklauso trečiai tiesei. **54.** $y=3$. **56.** $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120°=-\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,120°=-\sqrt{3}$; $\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{tg}\,135°=-1$; $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\,150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** $\sin 160°=0{,}3420$; $\cos 140°=-0{,}7660$; $\mathrm{tg}\,130°=-1{,}192$. **58.** 1) $\sin 40°=0{,}6428$; $\cos 40°=0{,}7660$; $\mathrm{tg}\,40°=0{,}8391$; 2) $\sin 14°36'=0{,}2521$; $\cos 14°36'=0{,}9677$; $\mathrm{tg}\,14°36'=0{,}2605$; 3) $\sin 70°20'=0{,}9417$; $\cos 70°20'=0{,}3365$; $\mathrm{tg}\,70°20'=2{,}798$; 4) $\sin 30°16'=0{,}5040$; $\cos 30°16'=0{,}8637$; $\mathrm{tg}\,30°16'=0{,}5836$; 5) $\sin 130°=0{,}7660$; $\cos 130°=-0{,}6428$; $\mathrm{tg}\,130°=-1{,}192$; 6) $\sin 150°30'=0{,}4924$; $\cos 150°30'=-0{,}8704$; $\mathrm{tg}\,150°30'=-0{,}5658$.

59. $\alpha_1\approx 11°32'$ arba $168°28'$; $\alpha_2\approx 134°26'$; $\alpha_3\approx 158°12'$. 60. 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. 61. 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$ arba $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$. 62. $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$.

§ 9.

12. 1) Negali; 2) negali. 15. Negali. 20. Atkarpa. 21. Tiesė. 22. Be galo daug. Tiesėje, lygiagrečioje toms tiesėms ir vienodai nutolusioje nuo jų. 23. Tris. 25. Dvi. 26. Be galo daug. 29. 1) Nurodymas. Taikykite simetriją to taško atžvilgiu. 2) Nurodymas. Taikykite simetriją tiesės b atžvilgiu. 35. Apskritimas. Nurodymas. Taikykite homotetiją bendrojo stygų galo atžvilgiu. 38. Nurodymas. Taikykite homotetiją, kurios centras — viršūnė, esanti prieš tą kraštinę. 39. 0,8 m; 1 m; 1,2 m. 40. 10 m, 25 m, 20 m. 42. 13,6 cm. 43. $AC=4$ m, $B_1C_1=14$ m. 44. $AC=24$ cm, $A_1C_1=18$ cm, $B_1C_1=15$ cm. 46. 15 cm, 20 cm, 25 cm. 47. 21 cm. 49. $\frac{ah}{a+h}$. 50. $A_1C_1=1{,}2$ m, $AC=3$ m. 51. 1) Nepanašūs; 2) panašūs. 52. 1) Panašūs; 2) nepanašūs. 53. 1) Panašūs; 2) nepanašūs. 55. $\frac{m}{n}$. 56. 4 cm. 57. $\frac{27}{28}$. 58. 1) 14 cm; 2) 6 dm. 59. Nurodymas. Vienoje kampo kraštinėje nuo viršūnės atidėkite atkarpas a ir b, o kitoje — atkarpą c. Per atkarpos a galą nubrėžkite tiesę, lygiagrečią tiesei, einančiai per atkarpų b ir c galus. 60. Panašūs. 61. 1) Taip; 2) taip; 3) ne. 62. 1 m, 2 m, 2,5 m. 63. 6,5 m, 5,5 m. 64. ≈ 42 m. 66. $\frac{bc}{b+c}$. 67. $m:n$. 68. $n:m$. 69. $AC=18$ m. Nurodymas. Trikampis ACD panašus į trikampį CBA. 70. $m:n$. 71. 15 cm, 18 cm. 72. 4,5 cm. 73. 2) $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. 77. $\approx 225{,}8$ km (žr. 76 uždavinį). 78. $\approx 82{,}4$ km (žr. 76 uždavinį).

§ 10.

1. (1, −1), (2, −1), (1, 1). 2. 1) $a=b=2$; 2) $a=-3$, $b=8$; 3) $a=b=1$. 4. 1) Nėra; 2) yra. 7. Vienakrypčiai spinduliai: AB ir DC, BC ir AD, CD ir BA, DA ir CB. Priešpriešiai spinduliai: AB ir CD, BC ir DA, DC ir BA, AD ir CB. 8. Vektoriai $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ir $\overline{BC}$ vienakrypčiai, vektorius $\overline{BA}$ priešpriešis kiekvienam iš vektorių $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. 11. Žr. 10 uždavinį. 14. $m=\pm 12$. 15. $n=\pm 7$. 17. 1) $\overline{(3, -5)}$; 2) $\overline{(-1, 1)}$; 3) $\overline{(1, 0)}$; 4) $\overline{(-3, 2)}$; 5) $\overline{(1, 5)}$. 18. 1) $\overline{(0, 1)}$; 2) $\overline{(-5, 3)}$; 3) $\overline{(1, -1)}$; 4) $\overline{(-1, 1)}$; 5) $\overline{(-1, -2)}$. 20. 1) 5; 2) 10; 3) 13. 21. 1) 13; 2) 10; 3) 17. 24. 1) $\bar{b}(6, 8)$; 2) $\bar{b}(-6, -8)$. 25. 1) $\overline{(-6, -8)}$; 2) $\overline{(9, 7)}$; 3) $\overline{(12, 7)}$. 26. 1) 10; 2) 13; 3) 15. 27. 1) 15; 2) 39; 3) 30. 28. 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. 30. Vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{c}$ vienakrypčiai, vektoriai $\bar{b}$ ir $\bar{d}$ priešpriešiai; $|\bar{a}|=|\bar{d}|$, $|\bar{b}|=|\bar{c}|$. 32. $n=2$. 33. Vienetiniai vektoriai $\bar{a}$, $\bar{c}$ ir $\bar{d}$; vektoriai $\bar{a}$ ir $\bar{d}$

kolinearūs. 34. $\overline{(0,6;\ 0,8)}$. 37. $\overline{(2,\ -3)}$. 38. $\lambda=-5$, $\mu=4$. 40. 90°. 41. $\sqrt{3}$. 42. 30°. 43. $\cos A=0,6$, $\cos B=0$, $\cos C=0,8$. 44. $\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$. 46. $m=-\frac{8}{3}$. 48. $\lambda=-\frac{1}{2}$. 53. 1) $\overline{OX}=\frac{\mu\bar{a}+\lambda\bar{b}}{\mu+\lambda}$.

§ 11.

2. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2\pm 2cd\cos\alpha}$. 3. $\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}$. 6. 13 m arba $\sqrt{1513}$ m $\approx 38,9$ m. 7. $\frac{5}{13}$, $\frac{33}{65}$, $\frac{3}{5}$. 8. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. 9. Nurodymas. Remkitės 8 uždaviniu. 12. Negali. 13. Negali. 14. $AB=\frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 15. $x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. 16. Atkarpa AD ilgesnė. 18. Kraštinė AB yra ilgiausia, o kraštinė BC trumpiausia. 19. Kampas B yra didžiausias, kampas C — mažiausias. 20. Šoninė kraštinė ilgesnė. 26. Kraštinė AB ilgėja.

27.	1) $\alpha=105°$,	$b\approx 2,59$,	$c\approx 3,66$;
	2) $\alpha=45°$,	$b\approx 17,93$,	$c\approx 14,64$;
	3) $\alpha=20°$,	$b\approx 65,78$,	$c\approx 88,62$;
	4) $\gamma=119°$,	$a\approx 16,69$,	$c\approx 24,83$;
	5) $\gamma=68°$,	$a\approx 13,57$,	$b\approx 11,22$.
28.	1) $\alpha\approx 79°6'$,	$\beta\approx 40°54'$,	$c\approx 10,58$;
	2) $\alpha\approx 11°2'$,	$\beta\approx 38°58'$,	$c\approx 28,02$;
	3) $\beta=26°45'$,	$\gamma\approx 58°15'$,	$a\approx 19,92$;
	4) $\beta\approx 20°30'$,	$\gamma\approx 14°30'$,	$a\approx 22,92$;
	5) $\alpha\approx 16°20'$,	$\gamma\approx 11°40'$,	$b\approx 53,41$;
	6) $\alpha\approx 129°50'$,	$\gamma\approx 35°10'$,	$b\approx 8,09$.
29.	1) $c\approx 8,69$,	$\beta\approx 21°9'$,	$\gamma\approx 38°51'$;
	2) $c\approx 19,63$,	$\beta\approx 12°53'$,	$\gamma\approx 29°7'$;
	3) $c\approx 22,30$,	$\beta\approx 5°35'$,	$\gamma\approx 10°25'$;
	4) sprendinių nėra;		
	5) $c\approx 11,40$,	$\beta\approx 41°49'$,	$\gamma\approx 108°11'$
	arba $c\approx 2,46$,	$\beta\approx 138°11'$,	$\gamma\approx 11°49'$.
30.	1) $\alpha\approx 28°57'$,	$\beta\approx 46°34'$,	$\gamma\approx 104°29'$;
	2) $\alpha\approx 53°35'$,	$\beta\approx 13°18'$,	$\gamma\approx 113°7'$;
	3) $\alpha\approx 34°3'$,	$\beta\approx 44°25'$,	$\gamma\approx 101°32'$;
	4) $\alpha\approx 38°38'$,	$\beta\approx 92°50'$,	$\gamma\approx 48°32'$;
	5) $\alpha\approx 14°58'$,	$\beta\approx 11°$,	$\gamma\approx 154°2'$;
	6) $\alpha\approx 135°35'$,	$\beta\approx 15°30'$,	$\gamma\approx 28°55'$.

§ 12.

2. R_1+R_2-d, R_1-R_2-d. 6. Nėra. 8. $\frac{1}{2}n(n-1)$. 10. 36°, 72°, 108°, 144°. 11. 1) 8; 2) 12. 12. 1) 10 kraštinių; 2) 15 kraštinių. 13. Nurodymas. To n-kampio visos kraštinės lygios, visi kampai lygūs. 14. Nurodymas. To n-kampio visos kraštinės lygios, visi kampai lygūs. 18. Nurodymas. Abu

spindulius išreikškite trikampio kraštine. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. N u r o d y m a s. Iš pradžių raskite apskritimo spindulį. **20.** $2\sqrt{6}$ dm. **21.** $2\sqrt{2}$ cm. **22.** $\sqrt{3}$ cm. **24.** N u r o d y m a s. Taikykite kosinusų teoremą. **25.** N u r o d y m a s. Remdamiesi 9 paragrafo 73 uždaviniu, raskite dešimčiakampio kraštinę, po to, taikydami kosinusų teoremą, — penkiakampio kraštinę. $a_{10}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **26.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **27.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **28.** $b=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$. **29.** $a=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$. **30.** N u r o d y m a s. Iš pradžių įbrėžkite taisyklingąjį šešiakampį. **31.** N u r o d y m a s. Iš pradžių apibrėžkite kvadratą. **32.** 1) 62,8 m; 2) 94,2 m. **33.** 6,28 mm. **34.** ≈3,06. N u r o d y m a s. Remkitės 23 uždavinio rezultatu. **35.** ≈3,11. N u r o d y m a s. Remkitės 24 uždavinio rezultatu. **36.** ≈6366,2 km. **37.** ≈6,3 cm. **38.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. N u r o d y m a s. Apskritimų centrai yra taisyklingojo n-kampio viršūnės. **39.** 1) $R(3+2\sqrt{3})$; 2) $R(1+\sqrt{2})$; 3) R. N u r o d y m a s. Apskritimų centrai yra taisyklingojo n-kampio viršūnės. **40.** ≈351,9 m/min. **41.** 1) 300° ir 60°; 2) 230° ir 130°; 3) 190° ir 170°. **42.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **43.** 31″. **44.** 1) ≈0,79 m; 2) ≈0,52 m; 3) ≈2,09 m; 4) ≈0,80 m; 5) ≈1,06 m; 6) ≈2,63 m. **45.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. N u r o d y m a s. Raskite apskritimo spindulį, kai žinoma apskritimo styga ir ją atitinkantis centrinis kampas. **46.** 1) $\frac{3}{\pi}l$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}l$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l$. N u r o d y m a s. Iš pradžių raskite apskritimo spindulį. **47.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$.

§ 13.

1. N u r o d y m a s. Taikykite Pitagoro teoremą. **2.** ≈180 m. **3.** $S=\frac{a^2}{2}$. **4.** Du kartus. **5.** Plotas padidės 9 kartus. **6.** 5 kartus. **7.** 8 m, 18 m. **8.** 12 dm, 25 dm. **9.** 30°. **10.** Kvadrato. **11.** 200 cm². **12.** 202,8 cm². **14.** $\sqrt{15}$ cm. **18.** 4800 m². **19.** $\frac{a^2}{4}$. **20.** 6 cm. **22.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **23.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **24.** 600 cm². **25.** 55 cm, 48 cm. **27.** $\angle C=90°$. **28.** ≈0,47 m². **29.** 5,64 m². **30.** $\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **31.** N u r o d y m a s. Remkitės 26 uždavinio teiginiu. **34.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1.4. **35.** 1) 11,2; 2) 4; 3) 7,2; 4) 1,4; 5) $\frac{2520}{169}$; 6) 1,344. **37.** 1) $R=\frac{65}{8}$, $r=4$; 2) $R=\frac{65}{8}$, $r=1{,}5$; 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{\sqrt{96}}\approx3{,}6$, $r=\frac{\sqrt{6}}{2}\approx1{,}2$. **38.** 4,5 cm. **40.** $R=29$ cm, $r=12$ cm. **41.** 480 cm². **42.** 540 m². **43.** $\frac{l^2}{4\pi}$. **44.** 1) 20π cm²; 2) 12π m²; 3) $\pi(a^2-b^2)$. **45.** 1) 4 kartus; 2) 25 kartus; 3) m^2 kartų. **46.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **47.** $\frac{1}{4}$. **48.** 2. **49.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$;

3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. **50.** 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. **51.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

52. 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 14.

2. Galima. **6.** Nurodymas. Kitoje plokštumoje pasirinkite tašką. Per tą tašką ir nagrinėjamąją tiesę išveskite plokštumą. Tai plokštumai taikykite lygiagrečių aksiomą. **10.** Keturias plokštumas. **12.** Žr. 11 uždavinį.

§ 15.

4. 1) 6 m; 2) 4,2 dm; 3) 6,2 cm; 4) $\frac{a+b}{2}$. **5.** 1) 1 m; 2) 0,6 dm; 3) 2,1 cm;

4) $\frac{|a-b|}{2}$. **6.** 1) 37,5 cm; 2) 9,9 cm; 3) 15 cm; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **7.** 1) 7 m; 2) 2 m;

3) $a+c-b$. **8.** Negali. **12.** 1) 5 cm; 2) 3 cm; 3) 8 cm; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **15.** Negali.

19. Žr. 16 uždavinį. **20.** Ne visada. Žr. 16 uždavinį. **26.** Kai taškas yra tų tiesių nusakytoje plokštumoje, sprendinio nėra. **32.** $A_1B_1=a$. **35.** Nurodymas. Palyginkite bet kokių dviejų tiesių $X_1X_2X_3$ ir $Y_1Y_2Y_3$ atkarpų santykius. **37.** Apskritimas. **38.** Apskritimas. **40.** Vidurinė linija. **41.** Negali. **42.** Gali. **43.** Nurodymas. Tos pačios tiesės atkarpų santykis nekinta. **44.** Nurodymas. Statmeno skersmens projekcija eina per duotojo skersmens projekcijai lygiagrečių stygų vidurio taškus.

§ 16.

2. Žr. 1 uždavinį. **3.** 1) 6,5 cm; 2) 15 cm; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$.

8. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **11.** Apskritimas. **12.** 6 cm, 15 cm. **13.** 15 cm, 41 cm. **14.** 4 cm, 8 cm.

15. 9 cm. **18.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **19.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **20.** 0,36 m arba 0,44 m. **23.** 1) 4,25 cm;

2) 6,75 cm; 3) $\frac{a+b}{2}$. **24.** 1) 1,05 cm; 2) 0,65 cm; 3) $\frac{|a-b|}{3}$. **25.** 0,6 m. **26.** 9 m.

27. $\frac{am}{m+n}$ (m atitinka tą pagrindą, per kurį išvesta plokštuma). **28.** $\frac{a}{2}$. **29.** 2,6 m.

30. $\approx 3{,}9$ m. **31.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **33.** 2,5 m. **34.** 6 m. **35.** 14 cm. **36.** $\sqrt{a^2+b^2}$.

37. $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **38.** Statmens ilgis $\sqrt{2a^2-b^2}$, kraštinės ilgis $\sqrt{b^2-a^2}$.

39. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **40.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **41.** 2 m. **42.** $\sqrt{2}$ m.

43. $2\sqrt{2}$ m. **44.** 6 m. **45.** 5 m, 3 m. **46.** 1 m. **47.** 2,5 m. **48.** 6,5 m. **49.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$.

50. $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **51.** $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. **53.** Nurodymas. Tai pačiai plokštumai statmenos tiesės yra lygiagrečios. **54.** 1) 11 m; 2) 13 m; 3) 8 m; 4) 7 m; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **55.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **56.** $\sqrt{23}$ m. **57.** 4 m. **58.** 1,3 m. **59.** 1,7 m.

§ 17.

2. (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3); (1, 2, 0), (1, 0, 3), (0, 2, 3). **3.** Atstumas nuo plokštumos xy lygus 3, nuo plokštumos xz lygus 2, nuo plokštumos yz lygus 1; atstumai nuo x, y, z ašių atitinkamai lygūs $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; atstumas nuo koordinačių pradžios lygus $\sqrt{14}$. **5.** (2, 2, 2) ir (−2, −2, −2). **6.** C (0, 0, 0). **7.** $x+2y+3z=7$. **11.** $B(0, -1, 3)$. **12.** 1) $D(6, 2, -2)$; 2) $D(0, -2, 2)$; 3) $D(-1, 7, -2)$. **16.** (−1 −2, −3), (0, 1, −2), (−1, 0, 3). **18.** (−1, −2, 1). **19.** 1), 2), 4) Nėra; 3) yra. **21.** 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **22.** 30°. **23.** 13 m. **25.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **26.** 30°. **27.** $a\sqrt{6}$. **28.** $a\sqrt{2}$. **29.** 30°. **30.** $3a$. **31.** 3,36 m. **33.** 1) $D(-2, 3, 0)$; 2) $D(2, 1, -2)$; **34.** 1) $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{9}{2}$; 2) $m=-2$, $n=-2{,}5$; 3) $m=4$, $n=6$. **36.** 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. **37.** $c=1$. **38.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2+|a|\cdot|b|}$. **39.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. **41.** $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. **42.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta$. **43.** 60° **44.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. **45.** $\bar{e}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ arba $\bar{e}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **46.** $\bar{e}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **47.** $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$. **48.** $a=b=0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$. **50.** 1) $3x-y-z+6=0$; 2) $3x+3y-2z-5=0$; 3) $x-5y+3z-38=0$. **51.** $\left|\frac{d}{a}\right|$, $\left|\frac{d}{b}\right|$, $\left|\frac{d}{c}\right|$. **55.** $k=\lambda a$, $l=\lambda b$, $m=\lambda c$, $\lambda\neq 0$. **56.** $kx+ly+mz=0$. **57.** 1) (2, 1, −2); 2) (4,5; 1,5; 0,5); 3) (−2, −7, −28); 4) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. **58.** N u r o d y m a s. Sudėkite panariui pirmąją ir trečiąją lygtis. **59.** 1) $c=0$, $d\neq 0$; 2) $c=d=0$. **60.** $c=0$ (žr. 59 uždavinį). **61.** N u r o d y m a s. Raskite kokį nors vektorių, statmeną vektoriui (2, 3, 1). **62.** N u r o d y m a s. Raskite vektorių, statmeną vektoriams (2, 3, 1) ir (1, 1, 1).

§ 18.

2. 60°. **4.** $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. 5. 144 cm². **6.** 7,5 cm. **7.** 12 cm. **9.** $3a^2$. **10.** $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **11.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **12.** 22 cm. **13.** $Q\sqrt{2}$. **14.** 12. **15.** 2 m. **16.** 4 m. **18.** 45 cm². **19.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **20.** $3l^2\sqrt{3}$. **22.** 188 m². **23.** ≈262 cm². **25.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **26.** 13 m, 9 m. **27.** 2 m², 3 m². **28.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **29.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **30.** 2 m². **31.** 1 464 cm². **32.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **34.** 3 cm. **37.** 11 m. **38.** $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **39.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **40.** $2\sqrt{3}$ cm. **41.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **42.** 9 cm. **43.** 5 cm, 6 cm. **44.** $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **45.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$;

2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **46.** 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$;

3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. **47.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a+\sqrt{a^2+12h^2})$; 2) $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$;

3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2})$. **48.** $2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2})$. **49.** 1,8 m, 4 m. **50.** $3a^2$.

52. $\cos\varphi=\frac{Q}{S}$. **53.** 16 cm ir 6 cm arba 12 cm ir 8 cm. **54.** $\sqrt{2}$ cm. **55.** 26 m^2.

56. 540 cm^2. **57.** 10 m^2. **59.** 9 cm. **60.** 1 dm. **61.** 6 cm. **62.** 2 cm. **63.** $\frac{a^2-b^2}{4}$.

64. $20\sqrt{2}$. **65.** 24 m^2, 30°. **66.** 168 m^2. **67.** $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2})$;

2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$.

71. 109°28′. N u r o d y m a s. Pirmiausia įrodykite, kad iš kiekvienos oktaedro viršūnės išeina dvi poros statmenų briaunų. Po to taikykite 4 uždavinio formulę.

§ 19.

1. 5 m. **3.** 36 cm^2. **4.** 3 dm. **5.** 3 dm. **6.** $\operatorname{tg} x=\frac{l}{2}$. **8.** 10 m. **9.** 5m. **10.** $\frac{l}{2}$.

11. R^2. **13.** 500. **14.** $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}$, jei $\alpha+\varphi<90°$. **16.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{3l}{4}$.

18. 3 cm. **19.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **20.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **21.** 5 m. **22.** $R-r$. **23.** a, $2a$. **24.** 30 dm^3.

25. 9 dm^2. **26.** $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. **28.** 16 π m^2. **30.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **31.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **32.** πR.

33. $\approx$785 km. **34.** 12 cm. **35.** 12 cm. **39.** 3 cm. **40.** 8 cm. **41.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **42.** 5 cm.

44. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z\pm1)^2=9$. **46.** 4π m. **47.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **48.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **49.** $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

$\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **50.** 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$.

51. $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. **52.** $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{180°}{n}}$. **53.** $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha}}$; $r=$

$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **54.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

§ 20.

1. 6 cm. **2.** $\approx$8,4 g/cm^3. **4.** 25 cm. **5.** 1,8 g/cm^3. **6.** $\approx$2,29 m. **7.** 30 m. **8.** Du kartus. **10.** 60 cm^3. **11.** 3 m^3. **12.** $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. **13.** $\sqrt{2}$ m^3. **14.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **15.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$;

2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. **16.** 0,5 g/cm³. **17.** ≈192,72 kg. **18.** 3 cm³. **19.** $\frac{a^3}{8}$. **20.** 6 m³. **22.** 3 060 m³. **23.** 6 048 m³/h. **24.** 35 200 m³. **25.** 48 cm³. **26.** 12 cm³. **27.** 2 cm. **28.** $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. **29.** $a^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **30.** $2\sqrt{\sin 3\alpha\sin^3\alpha}$. **31.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **32.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **33.** 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **34.** $\frac{3}{4}a^3$. N u r o d y m a s. Piramidės aukštinė lygi į pagrindą įbrėžto apskritimo spinduliui. **35.** $\frac{1}{6}b^3$. **36.** $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. **37.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **38.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. N u r o d y m a s. Oktaedrą padalykite į dvi taisyklingąsias keturkampes piramides. **39.** 360 m³. **40.** 48 cm³. N u r o d y m a s. Piramidės aukštinės pagrindas sutampa su apibrėžto apie piramidės pagrindą apskritimo centru. **41.** $\sqrt{11}$ cm³. **43.** $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. **44.** $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. N u r o d y m a s. Taikykite 42 uždavinio formulę. **45.** $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. **46.** $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. **47.** $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. **49.** $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$. **50.** ≈0,75 mm. **51.** ≈4500 l. **52.** n kartų; $\sqrt{n}$ kartų. **53.** 4; 1. **54.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **55.** ≈61 kg. **57.** ≈2%. **58.** $\frac{\pi}{3}|R^3-r^3|$. **59.** $\frac{\pi^2}{3}|R^3-r^3|$. **60.** 14 cm. **61.** $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, kai $r<R$. **62.** $2\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$ m³≈12 m³. **63.** 9π m³. N u r o d y m a s. Kūgio aukštinė lygi jo pagrindo spinduliui. **64.** $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. **65.** $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **66.** ≈1,6 t. **67.** ≈0,35 m. **68.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **69.** $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **70.** ≈14 cm. **71.** ≈39 cm. **72.** 167. **73.** $33\frac{1}{3}$ %. N u r o d y m a s. Rutulio skersmuo lygus ritinio skersmeniui. **74.** ≈2 148 cm³. **75.** $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. **76.** 45π cm³, 243π cm³. **77.** 0,028. **78.** 5 : 16. **79.** 3528π cm³. N u r o d y m a s. Nurodytąją rutulio dalį padalykite į ritinį ir dvi rutulio nuopjovas. **80.** 112,5π dm³ arba 450π dm³. **81.** $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. N u r o d y m a s. Tas kūnas yra rutulio išpjova.

§ 21.

1. $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. **2.** Didžiausio paviršiaus plotas lygus kitų dviejų paviršių plotų sumai. **3.** ≈40,4 m². **4.** ≈116 m². **5.** 75 cm. **6.** $\pi M+2Q$. N u r o d y m a s. Iš pagrindo ploto raskite pagrindo spindulį. **7.** ≈25,3 m². **8.** ≈33,98 m². **9.** $\frac{S}{\cos\alpha}$. N u r o d y m a s. Iš pagrindo ploto raskite pagrindo spindulį. **10.** 2 : 3. **11.** 30°. **12.** 1 m. N u r o d y m a s. Pagrindo apskritimo ilgis lygus išpjovos lanko ilgiui. **13.** ≈1,04 m². **14.** ≈4,3 kg. **15.** N u r o d y m a s. Rutulio ir kūgio tūrius išreikškite kūgio sudaromosios ilgiu. **16.** N u r o d y m a s. Abu paviršius išreikškite kvadrato kraštine. **17.** 180π cm². **18.** 512π cm².

LIETUVIŲ-RUSŲ KALBŲ GEOMETRIJOS TERMINŲ ŽODYNĖLIS

abscìsė абсци́сса

aksiomà аксио́ма

apibrėžìmas определе́ние

apskritìmas окру́жность
  apibrėžtàsis a. опи́санная окру́жность
  apibrėžtìnis a. опи́санная окру́жность
  didỹsis a. больша́я окру́жность
  įbrėžtàsis a. впи́санная окру́жность
  įbrėžtìnis a. впи́санная окру́жность

apotemà апофе́ма
  nupjautìnės piramìdės a. апофе́ма усечённой пирами́ды
  piramìdės a. апофе́ма пирами́ды

apskaičiãvimas вычисле́ние

artinỹs приближённое значе́ние
  a. su pértekliumi приближённое значе́ние с избы́тком
  a. su trúkumu приближённое значе́ние с недоста́тком

ašìs ось
  abscìsių a. ось абсци́сс
  koordinãčių a. ось координа́т
  ordinãčių a. ось ордина́т
  rìtinio a. ось цили́ндра
  simètrijos a. ось симметри́и
  stãčiojo kúgio a. ось пря́мого ко́нуса
  taisyklìngosios piramìdės a. ось пра́вильной пирами́ды

atidėjimas откла́дывание

atkarpà отре́зок
  proporcìngos ãtkarpos пропорциона́льные отре́зки

atsãkymas отве́т

atstùmas расстоя́ние

aukštìnė высота́
  kúgio a. высота́ ко́нуса
  piramìdės a. высота́ пирами́ды
  prìzmės a. высота́ при́змы
  rìtinio a. высота́ цили́ндра
  trìkampio a. высота́ треуго́льника

brėžinỹs чертёж

briaunà ребро́
  briaunaĩnio b. ребро́ многогра́нника
  dvisiẽnio kam̃po b. ребро́ двугра́нного угла́
  piramìdės šóninė b. боково́е ребро́ пирами́ды
  prìzmės šóninė b. боково́е ребро́ при́змы

briaunaĩnis многогра́нник
  iškilàsis briaunaĩnis вы́пуклый многогра́нник
  taisyklìngasis b. пра́вильный многогра́нник

brūkšnẽlis чёрточка

ceñtras центр
  apskritìmo c. центр окру́жности
  rùtulio c. центр ша́ра
  rùtulio simètrijos c. центр симметри́и ша́ра
  simètrijos c. центр симметри́и
  skrìtulio c. центр кру́га

dalìjimas разбие́ние

dalìs часть
  tiesẽs d. часть прямо́й

dalinỹs разбие́ние
  plokštumõs d. разбие́ние пло́скости

daugiãkampis многоуго́льник
  apibrėžtàsis d. опи́санный многоуго́льник
  apibrėžtìnis d. опи́санный многоуго́льник
  įbrėžtàsis d. впи́санный многоуго́льник
  įbrėžtìnis d. впи́санный многоуго́льник
  iškilàsis d. вы́пуклый многоуго́льник
  plokščiàsis d. пло́ский многоуго́льник
  taisyklìngasis d. пра́вильный многоуго́льник

daugýba умножéние
vèktoriaus d. iš skaĩčiaus умножéние вéктора на числó
dodekaèdras додекáэдр

egzistãvimas существовáние
erdvễ прострáнство
figūrà фигýра
erdvìnė f. фигýра в прострáнстве
geomètrinė f. геометрúческая фигýра
lýgios figūros рáвные фигýры
panãšios figūros подóбные фигýры
plokštumõs f. фигýра на плóскости
plokščióji f. фигýра на плóскости
fòrmulė фóрмула
apskritìmo ilgio f. фóрмула длины́ окрýжности
Hèrono f. фóрмула Герона
kúgio tū̃rio f. фóрмула объёма кóнуса
skritulio plóto f. фóрмула плóщади крýга
sùkinio tū̃rio f. фóрмула объёма тéла вращéния
formuluõtė формулирóвка
teorèmos f. формулирóвка теорéмы

gãlas конéц
atkarpõs g. конéц отрéзка
geomètrija геомéтрия
euklìdinė g. евклúдовая геомéтрия
geomètrinė taškų̃ vietà геометрúческое мéсто тóчек
grandìs звенó
laužtễs g. звенó лóманой
gretasienis параллелепúпед
pasviràsis g. наклóнный параллелепúпед
stačiakam̃pis g. прямоугóльный параллелепúпед
statùsis g. прямóй параллелепúпед

homotètija гомотетия

įbrėžtàsis вписанный
įbrėžtìnis вписанный
ikosaèdras икосáэдр
ìlgis длинá
apskritìmo i. длинá окрýжности
laužtễs i. длинá лóманой
vèktoriaus i. абсолю́тная величинá вéктора
įródymas доказáтельство
į. príeštaros metodù доказáтельство от протúвного
įstrižainė диагонáль
daugiãkampio į. диагонáль многоугóльника
gretasienio į. диагонáль параллелепúпеда
kvadrãto į. диагонáль квадрáта
lygiagretaĩnio į. диагонáль параллелогрáмма
ròmbo į. диагонáль рóмба
stačiãkampio į. диагонáль прямоугóльника
prizmės į. диагонáль прúзмы
išpjova сéктор
rutulio i. шаровóй сéктор
skrìtulio i. круговóй сéктор
išvada вы́вод, заключéние
teorèmos i. заключéние теорéмы
įžambìnė гипотенýза

judesỹs движéние

kampaĩnis угóльник
kam̃pas ýгол
bukàsis k. тупóй ýгол
centrìnis k. центрáльный ýгол
daugiasienis k. многогрáнный ýгол
dvisienis k. двугрáнный ýгол
gretutìnis k. смéжный ýгол
įbrėžtìnis k. вписанный ýгол
ištiestìnis k. развёрнутый ýгол
kryžmìnis k. вертикáльный ýгол
papildomasis k. дополнúтельный ýгол
plokščiàsis k. плóский ýгол
smailùsis k. óстрый ýгол
statùsis k. прямóй ýгол
tiesìnis k. линéйный ýгол
trìkampio k. ýгол треугóльника
trisienis k. трёхгрáнный ýгол
trisienio kam̃po dvisienis k. двугрáнный ýгол трёхгрáнного углá
k. tarp tiesių̃ ýгол мéжду прямы́ми
k. tarp tiesės ir plokštumõs ýгол мéжду прямóй и плóскостью
k. tarp plokštumų̃ ýгол мéжду плоскостя́ми

k. tarp prasileñkiančių tiesių ýгол мéжду скрéщивающимися прямы́ми

vidaũs k. внýтренний ýгол

vidaũs vienašãliai kampaĩ внýтренние односторóнние углы́

vidaũs príešiniai kampaĩ внýтренние нáкрест лежáщие углы́

ketùrkampis четырёхугóльник

erdvìnis k. пространственный четырёхугóльник

ketvir̃tis чéтверть

kirstìnė секýщая

kitìmas изменéние

koeficieñtas коэффициéнт

homotètijos k. коэффициéнт гомотéтии

tiesẽs krypties k. угловóй коэффициéнт прямóй

panašùmo k. коэффициéнт подóбия

koordinãtė координáта

dekártinės koordinãtės декáртовые координáты

tãško k. координáта тóчки

vèktoriaus koordinãtės координáты вéктора

kòsinusas кóсинус

kam̃po k. кóсинус углá

kraštìnė сторонá

daugiãkampio k. сторонá многоугóльника

bendrà k. óбщая сторонá

grētimos kraštìnės сосéдние стóроны

kam̃po k. сторонá углá

ketùrkampio k. сторонá четырёхугóльника

pjū̃vio k. сторонá сечéния

príešingoji k. противолежáщая сторонá

šóninė k. боковáя сторонá

trapècijos šóninė k. боковáя сторонá трапéции

trìkampio k. сторонá треугóльника

kryptìs направлéние

kùbas куб

kū̃gis кóнус

apskritàsis k. круговóй кóнус

lygiakrãštis k. равносторóнний кóнус

nupjautìnis k. усечённый кóнус

statùsis k. прямóй кóнус

kū́nas тéло

paprastàsis k. простóе тéло

kvadrãtas квадрáт

láipsnis грáдус

lañkas дугá

apskritìmo l. дугá окрýжности

lankẽlis дýжка

laužtė̃ лóманая

paprastóji l. простáя лóманая

uždaróji l. зáмкнутая лóманая

lentẽlė таблúца

liestìnė касáтельная

lietìmasis касáние

išorìnis l. внéшнее касáние

vidìnis l. внýтреннее касáние

lygiagretaĩnis параллелогрáмм

lygýbė рáвенство

lygtìs уравнéние

apskritìmo l. уравнéние окрýжности

figū̃ros l. уравнéние фигýры

plokštumõs l. уравнéние плóскости

sfèros l. уравнéние сфéры

tiesẽs l. уравнéние прямóй

lygùmas рáвенство

figū̃rų l. рáвенство фигýр

trìkampių l. рáвенство треугóльников

lìnija лúния

trapècijos vidurìnė l. срéдняя лúния трапéции

trìkampio vidurìnė l. срéдняя лúния треугóльника

liniuõtė линéйка

l. su padalomìs линéйка с делéниями

mãtas мéра

kam̃po radiãninis m. радиáнная мéра углá

kam̃po láipsninis m. грáдусная мéра углá

matãvimas измерéние

matemãtika матемáтика

mãtlankis транспортúр

matmuõ линéйный размéр

metòdas мéтод

geomètrinių viẽtų m. мéтод геометрúческих мéст

mòdulis абсолю́тная величинá

vèktoriaus m. абсолю́тная величинá вéктора

nelygýbė нерáвенство

trìkampio n. нерáвенство треугóльника

nùlis нуль

núopjova сегме́нт
rùtulio n. шаровóй сегме́нт
skrìtulio n. круговóй сегме́нт

oktaèdras октáэдр
ordinãtė ордина́та
òrtas орт

pabaigà конéц
vèktoriaus p. конéц вéктора
padėtìs расположéние, положéние
tarpùsavio p. взаи́мное расположéние
tiesẽs p. расположéние прямóй
pãgrindas основáние
kūgio p. основáние кóнуса
nupjautìnės piramìdės p. основáние усечённой пирами́ды
pasvirõsios p. основáние наклóнной
piramìdės p. основáние пирами́ды
prìzmės p. основáние при́змы
rìtinio p. основáние цили́ндра
statmeñs p. основáние перпендикуля́ра
trapècijos p. основáние трапéции
trìkampio p. основáние треугóльника
panašùmas подóбие
figūrų̃ p. подóбие фигу́р
trìkampių p. подóбие треугóльников
pasviróji наклóнная
pataisà попрáвка
pavir̃šius повéрхность
kūgio p. повéрхность кóнуса
kūgio šóninis p. боковáя повéрхность кóнуса
piramìdės p. повéрхность пирами́ды
piramìdės šóninis p. боковáя повéрхность пирами́ды
prìzmės p. повéрхность при́змы
rìtinio šóninis p. боковáя повéрхность цили́ндра
rùtulio p. шаровáя повéрхность
vìsas p. пóлная повéрхность
penkiãkampis пятиугóльник
perimètras пери́метр
daugiãkampio p. пери́метр многоугóльника
trìkampio p. пери́метр треугóльника
piramìdė пирами́да
apibrėžtóji p. опи́санная пирами́да
įbrėžtóji p. впи́санная пирами́да
n-kam̃pė p. *n*-угóльная пирами́да
nupjautìnė p. усечённая пирами́да
taisyklìngoji p. прáвильная пирами́да
pjūvis сечéние
įstrižìnis p. диагонáльное сечéние
kūgio ašìnis p. осевóе сечéние кóнуса
plokščiàsis p. плóское сечéние
rìtinio ašìnis p. осевóе сечéние цили́ндра
planimètrija планимéтрия
plokštumà плóскость
koordinãčių p. координáтная плóскость
liečiamóji p. касáтельная плóскость
pjūvio p. плóскость сечéния
simètrijos p. плóскость симметри́и
skersmenìnė p. диаметрáльная плóскость
plótas плóщадь
figūros p. плóщадь фигу́ры
gretasiẽnio pãgrindo p. плóщадь основáния параллелепи́педа
kūgio šóninio pavir̃šiaus p. плóщадь боковóй повéрхности кóнуса
pavir̃šiaus p. плóщадь повéрхности
piramìdės pãgrindo p. плóщадь основáния пирами́ды
prìzmės pãgrindo p. плóщадь основáния при́змы
prìzmės šóninio pavir̃šiaus p. плóщадь боковóй повéрхности при́змы
pjūvio p. плóщадь сечéния
rìtinio šóninio pavir̃šiaus p. плóщадь боковóй повéрхности цили́ндра
sfèros p. плóщадь сфéры
sfèros núopjovos p. плóщадь повéрхности сфери́ческого сегмéнта
skrìtulio p. плóщадь кру́га
šóninio pavir̃šiaus p. плóщадь боковóй повéрхности
póstūmis перенóс
lygiagretùsis p. параллéльный перенóс
pósūkis поворóт
póžymis при́знак
lygiagretùmo p. при́знак параллéльности
trìkampių lygùmo p. при́знак рáвенства треугóльников
pradžià начáло
atkarpõs p. начáло отрéзка
koordinãčių p. начáло координáт
vèktoriaus p. начáло вéктора

prasmẽ смысл
geomètrinė p. геометрический смысл
príekampis внешний угол
priklaũsymas принадлежность
prízmė призма
apibrėžtóji p. описанная призма
įbrėžtóji p. вписанная призма
pasviróji p. наклонная призма
stačióji p. прямая призма
taisyklìngoji p. правильная призма
projèkcija проекция
lygiagrečióji p. параллельная проекция
pasvirõsios p. проекция наклонной
statmenóji p. ортогональная проекция
projektãvimas проектирование
lygiagretùsis p. параллельное проектирование
pusiáukampinė биссектриса
kam̃po p. биссектриса угла
trìkampio p. биссектриса треугольника
pusiáukraštinė медиана
trìkampio p. медиана треугольника
pùsperimetris полупериметр
pùsplokštumė полуплоскость
pùsrutulis полушар
pùstiesė полупрямая
papìldomoji p. дополнительная полупрямая
príešpriešės pùstiesės противоположно направленные полупрямые
sutam̃pančios pùstiesės совпадающие полупрямые
vienakrỹptės pùstiesės одинаково направленные полупрямые

radiãnas радиан
reikšmẽ значение
ritinỹs цилиндр
statùsis r. прямой цилиндр
rodỹklė стрелка
ròmbas ромб
rutulỹs шар

są́lyga условие
teorèmos s. условие теоремы
sámprotavimas рассуждение
sándauga произведение
skaliãrinė s. скалярное произведение
vèktoriaus ir skaĩčiaus s. произведение вектора на число
sántykis отношение
sąryšis соотношение
savýbė свойство
jùdesio s. свойство движения
matãvimo s. свойство измерения
pagrindìnė s. основное свойство
sferà сфера
síena грань
briaunaĩnio s. грань многогранника
dvisiẽnio kam̃po s. грань двугранного угла
nupjautìnės piramìdės šóninė s. боковая грань усечённой пирамиды
piramìdės s. грань пирамиды
príešingoji s. противолежащая грань
prìzmės šóninė s. боковая грань призмы
simètrija преобразование симметрии
s. tãško ãtžvilgiu преобразование симметрии относительно точки
s. tiesẽs ãtžvilgiu преобразование симметрии относительно прямой
sìnusas синус
kam̃po s. синус угла
skaĩčius число
iracionalùsis s. иррациональное число
sveikàsis s. целое число
skersmuõ диаметр
apskritìmo s. диаметр окружности
rùtulio s. диаметр шара
skrìtulio s. диаметр круга
skìrtumas разность
vèktorių s. разность векторов
skliaustẽlis скобка
skriestùvas циркуль
skritulỹs круг
didỹsis s. большой круг
slúoksnis слой
rùtulio s. шаровой слой
spindulỹs радиус, луч
apskritìmo s. радиус окружности
rìtinio s. радиус цилиндра
rùtulio s. радиус шара
skrìtulio s. радиус круга
sprendìmas решение
trìkampių s. решение треугольников
sprendinỹs решение
sritìs область
paprastóji s. простая область
stačiãkampis прямоугольник
statìnis катет
statmuõ перпендикуляр
bendràsis s. общий перпендикуляр

vìdurio s. серединный перпендикуляр

stereomètrija стереометрия

stygà хорда

sudãromoji образующая

rìtinio s. образующая цилиндра

kū́gio s. образующая конуса

sudėtìs сложение

vèktorių s. сложение векторов

sukinỹs тело вращения

sumà сумма

vèktorių s. сумма векторов

susikirtìmas пересечение

taisỹklė правило

lygiagretaĩnio t. правило параллелограмма

trìkampio t. правило треугольника

tángentas тангенс

kam̃po t. тангенс угла

tapatýbė тождество

trigonomètrinė t. тригонометрическое тождество

tãškas точка

lietìmosi t. точка касания

pradžiõs t. начальная точка

savìkirtos t. точка самопересечения

susikirtìmo t. точка пересечения

teiginỹs утверждение

teoremà теорема

atvirkštìnė t. обратная теорема

kòsinusų t. теорема косинусов

Pitagòro t. теорема Пифагора

sìnusų t. теорема синусов

Tãlio t. теорема Фалеса

trijų̃ statmenų̃ t. теорема о трёх перпендикулярах

tetraèdras тетраэдр

taisyklìngasis t. правильный тетраэдр

tiesė̃ прямая

lygiagrečiósji t. параллельная прямая

prasileñkiančiosios t. скрещивающиеся прямые

skirtìngos t. разные прямые

stãtmenosios t. перпендикулярные прямые

susikertančiosios t. пересекающиеся прямые

transformãcija преобразование

atvirkštìnė t. обратное преобразование

figū̃rų t. преобразование фигур

panašùmo t. преобразование подобия

simètrijos t. преобразование симметрии

trapècija трапеция

lygiašõnė t. равнобокая трапеция

trìkampis треугольник

lygiakrãštis t. равносторонний треугольник

lygiašõnis t. равнобедренный треугольник

statùsis t. прямоугольный треугольник

taisyklìngasis t. правильный треугольник

lygíeji trìkampiai равные треугольники

panašíeji trìkampiai подобные треугольники

trùpmena дробь

dešimtaĩnė t. десятичная дробь

baigtìnė dešimtaĩnė t. конечная десятичная дробь

begalìnė dešimtaĩnė t. бесконечная десятичная дробь

tū̃ris объём

gretasiẽnio t. объём параллелепипеда

kū́gio t. объём конуса

kū́no t. объём тела

nupjautìnio kū́gio t. объём усечённого конуса

nupjautìnės piramìdės t. объём усечённой пирамиды

piramìdės t. объём пирамиды

prìzmės t. объём призмы

rìtinio t. объём цилиндра

rùtulio t. объём шара

rùtulio ìšpjovos t. объём шарового сектора

rùtulio núopjovos t. объём шарового сегмента

sùkinio t. объём тела вращения

uždavinỹs задача

brėžìmo u. задача на построение

vaizdãvimas изображение

erdvìnių figū̃rų v. изображение пространственных фигур

vèktorius вектор

kolinearíeji vèktoriai коллинеарные векторы

koordinãtinis v. координáтный вéктор
lygíeji vèktoriai рáвные вéкторы
nùlinis v. нулевóй вéктор
plokštumõs v. вéктор на плóскости
príešpriešiai vèktoriai противополóжно напрáвленные вéкторы
vienakrỹpčiai vèktoriai одинáково напрáвленные вéкторы
vienetìnis v. едини́чный вéктор

vidurỹs середи́на
atkarpõs v. середи́на отрéзка

vienatìs еди́нственность

víenetas едини́ца
matãvimo v. едини́ца измерéния

viršū̃nė верши́на
briaunaĩnio v. верши́на многогрáнника
daugiãkampio v. верши́на многоугóльника
gretimóji v. сосéдняя верши́на
kam̃po v. верши́на углá
ketùrkampio v. верши́на четырёхугóльника
kū́gio v. верши́на кóнуса
laužtẽs v. верши́на лóманой
piramìdės v. верши́на пирами́ды
príešingoji v. противолежáщая верши́на
trìkampio v. верши́на треугóльника

žénklas знак
lygùmo ž. знак рáвенства

žymė̃jimas обозначéние

TURINYS

Aleksejus Vasiljevičius Pogorelovas
GEOMETRIJA
Mokymo priemonė VI—XI klasei

Redaktorė *N. Ramanauskienė*
Viršelis *G. Pempės*. Men. redaktorė *Z. Šalienė*
Techn. redaktorė *R. Blotnienė*. Korektorė *L. Fedaravičienė*
Vertimą recenzavo *Juozas Mačys*

Алексей Васильевич Погорелов
ГЕОМЕТРИЯ
Учебное пособие для VI—XI классов
Перевели с русского *Пятрас Румшас, Пятрас Вашкас*
Словарь составила *Элена Нянишките*
Издание второе
Оригинал допущен Министерством просвещения СССР
Министерством просвещения Литовской ССР принято к пользованию
в средних школах
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»

ИБ № 4027
Pasirašyta spausdinti iš matricų 85.02.05. Formatas 60×90[1]/16. Popierius spaudos Nr. 2. Literatūrinė garnitūra, 10 punktų. Iškilioji spauda. 17+0,25 priešl. sąl. sp. l., 17,875 sąl. spalv. atsp., 16,82+0,34 priešl. apsk. leid. l. Papildomas tiražas 56 000 egz. Užsak. Nr. 2085. Leid. Nr. 10292. Kaina 30 kp.

Leidykla „Šviesa“, 233000 Kaunas, Lenino pr. 25
Spausdino V. Kapsuko-Mickevičiaus spaustuvė, 233000 Kaunas, Lenino pr. 23

VADOVĖLIO KORTELĖ

Eil. Nr.	Mokinio vardas ir pavardė	Mokslo metai	Vadovėlio išvaizda (labai gera, gera, patenkinama)	
			mokslo metų pradžioje	mokslo metų pabaigoje

GERBKITE IR TAUSOKITE VADOVĖLIUS!